Université Clermont Auvergne
Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal

École doctorale des sciences fondamentales

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

François BALLAŸ

Spécialité : Mathématiques

D.U. 922

Approximation diophantienne sur les variétés projectives et les groupes algébriques commutatifs

dirigée par

Huayi CHEN et **Éric GAUDRON**

Soutenue le 25 octobre 2017 devant le jury présidé par Gaël Rémond et composé de :

José Ignacio BURGOS GIL	Investigador Científico	ICMAT Madrid
Huayi CHEN	Professeur	Université Paris Diderot
Éric GAUDRON	Professeur	Université Clermont Auvergne
Marusia REBOLLEDO	Maître de conférences	Université Clermont Auvergne
Gaël RÉMOND	Directeur de recherche C.N.R.S.	Université Grenoble-Alpes

Au vu des rapports de :

José Ignacio BURGOS GIL	Investigador Científico	ICMAT Madrid
Noriko HIRATA-KOHNO	Professeur	Université de Nihon
Atsushi MORIWAKI	Professeur	Université de Kyoto

Approximation diophantienne sur les variétés projectives et les groupes algébriques commutatifs

Résumé

Dans cette thèse, nous appliquons des outils issus de la théorie d'Arakelov à l'étude de problèmes de géométrie diophantienne. Une notion centrale dans notre étude est la théorie des pentes des fibrés vectoriels hermitiens, introduite par Bost dans les années 90. Nous travaillons plus précisément avec sa généralisation dans le cadre adélique, inspirée par Zhang et développée par Gaudron.

Ce mémoire s'articule autour de deux axes principaux. Le premier consiste en l'étude d'un remarquable théorème de géométrie diophantienne dû à Faltings et Wüstholz, qui généralise le théorème du sous-espace de Schmidt. Nous commencerons par retranscrire la démonstration de Faltings et Wüstholz dans le langage de la théorie des pentes. Dans un second temps, nous établirons des variantes effectives de ce théorème, que nous appliquerons pour démontrer une généralisation effective du théorème de Liouville valable pour les points fermés d'une variété projective fixée. Ce résultat fournit en particulier une majoration explicite de la hauteur des points satisfaisant une inégalité analogue à celle du théorème de Liouville classique.

Dans la seconde partie de cette thèse, nous établirons de nouvelles mesures d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif, dans le cas dit rationnel. Notre approche utilise les arguments de la méthode de Baker revisitée par Philippon et Waldschmidt, combinés avec des outils de la théorie des pentes. Nous y intégrons un nouvel argument, inspiré par des travaux antérieurs de Bertrand et Philippon, nous permettant de contourner les difficultés introduites par le cas périodique. Cette approche évite le recours à une extrapolation sur les dérivations à la manière de Philippon et Waldschmidt. Nous parvenons ainsi à supprimer une hypothèse technique contraignante dans plusieurs théorèmes de Gaudron, tout en précisant les mesures obtenues.

Mots-clés : Géométrie diophantienne, approximation diophantienne, géométrie d'Arakelov, théorie des pentes, points rationnels, formes linéaires de logarithmes, hauteurs.

Diophantine approximation on projective varieties and on commutative algebraic groups

Abstract

In this thesis, we study diophantine geometry problems on projective varieties and commutative algebraic groups, by means of tools from Arakelov theory. A central notion in this work is the slope theory for hermitian vector bundles, introduced by Bost in the 1990s. More precisely, we work with its generalization in an adelic setting, inspired by Zhang and developed by Gaudron.

This dissertation contains two major lines. The first one is devoted to the study of a remarkable theorem due to Faltings and Wüstholz, which generalizes Schmidt's subspace theorem. We first reformulate the proof of Faltings and Wüstholz using the formalism of adelic vector bundles and the adelic slope method. We then establish some effective variants of the theorem, and we deduce an effective generalization of Liouville's theorem for closed points on a projective variety defined over a number field. In particular, we give an explicit upper bound for the height of the points satisying a Liouville-type inequality.

In the second part, we establish new measures of linear independence of logarithms over a commutative algebraic group. We focus our study on the rational case. Our approach combines Baker's method (revisited by Philippon and Waldschmidt) with arguments from the slope theory. More importantly, we introduce a new argument to deal with the periodic case, inspired by previous works of Bertrand and Philippon. This method does not require the use of an extrapolation on derivations in the sense of Philippon-Waldschmidt. In this way, we are able to remove an important hypothesis in several theorems of Gaudron establishing lower bounds for linear forms in logarithms.

Keywords : Diophantine geometry, diophantine approximation, Arakelov geometry, slope theory, rational points, linear forms in logarithms, heights.

Remerciements

. Je souhaite adresser mes remerciements les plus chaleureux à mes directeurs de thèse, Huayi Chen et Éric Gaudron. Je leur suis extrêmement reconnaissant de m'avoir proposé ce sujet de thèse passionnant et pour leur encadrement durant ces trois années : leur suivi permanent, leur grande disponibilité, leurs encouragements et leurs suggestions précieuses m'ont permis de mener à bien ce travail dans des conditions idéales. Éric et Huayi m'ont apporté un soutien considérable. Grâce à eux, ces années ont été formidablement épanouissantes et enrichissantes, d'un point de vue à la fois scientifique et personnel, et j'en garderai un excellent souvenir.

J'exprime toute ma gratitude à José Ignacio Burgos Gil, Noriko Hirata-Kohno et Atsushi Moriwaki. Leurs travaux ont été d'une grande importance pour moi, et je suis très honoré qu'ils aient accepté de rapporter ma thèse. Je les remercie pour leur travail de relecture et pour leur rapports encourageants. Je suis par ailleurs très reconnaissant à José Ignacio Burgos Gil d'être présent pour assister à ma soutenance.

Je remercie également Marusia Rebolledo et Gaël Rémond d'avoir accepté de faire partie du jury. Merci beaucoup à Marusia pour sa lecture minutieuse de ma thèse, ainsi que pour ses commentaires détaillés.

J'ai eu la chance de rencontrer de nombreux mathématiciens au cours de ces trois années, notamment lors de conférences en France et à l'étranger. Je souhaite remercier toutes les personnes avec qui j'ai pu discuter ou qui ont manifesté de l'intérêt pour mes travaux à ces occasions. Merci en particulier aux personnes qui m'ont permis d'exposer certains résultats de cette thèse, et notamment à Vincent Bosser, Bruno Deschamps, Răzvan Liţcanu, Marusia Rebolledo et Shun Tang. Je remercie également tous les membres du Beijing International Center for Mathematical Research pour leur hospitalité lors de deux séjours à Pékin, ainsi que pour une offre de post-doctorat qui m'a permis d'achever la rédaction de cette thèse dans des conditions sereines.

J'ai passé trois années très agréables au Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal, où j'ai bénéficié d'excellentes conditions de travail. Je souhaite remercier l'ensemble de ses membres pour la très bonne ambiance qu'ils y font régner et pour leur accueil chaleureux. Merci en particulier à tous les membres de l'équipe de Théorie des Nombres, pour leur sympathie et leur bonne humeur communicative. Je remercie aussi toutes les personnes avec qui j'ai pu collaborer dans le cadre de mon service d'enseignement, ainsi que l'ensemble du personnel administratif et technique du laboratoire et du département de Mathématiques et Informatique.

Je n'aurais pas commencé cette thèse sans les enseignants qui ont su me transmettre leur passion des mathématiques tout au long de mon parcours scolaire et universitaire, et je voudrais aujourd'hui les en remercier. Ma reconnaissance s'adresse en particulier à tous les enseignants du Master 2 Géométrie Arithmétique de l'ENS de Lyon et de l'Université Claude Bernard Lyon 1 de l'année 2012-2013.

Je salue et remercie tous les autres doctorants du laboratoire, et tout particulièrement Doha, Émeline, Rabih et Yacouba pour la bonne humeur et la convivialité du bureau 1109. C'était un plaisir de faire la connaissance de Pierre Lezowski lors de son séjour post-doctoral de deux ans au laboratoire. Merci pour toutes nos discussions, mathématiques ou non, et pour tous tes conseils.

Merci à tous les amis de Lyon et de Clermont-Ferrand qui m'ont accompagné pendant ces années. Votre soutien moral a souvent été déterminant pour moi. Un immense merci à mes amis bourguignons, sur qui j'ai toujours pu compter et à qui je dois tant qu'il m'est impossible d'exprimer ce que représente notre amitié en quelques lignes.

Enfin, merci infiniment à Gilles, Hélène et Paul pour votre soutien constant et votre confiance en mes choix. Je suis très heureux que vous puissiez assister à ma soutenance, et je vous remercie du fond du cœur.

Table des Matières

Conventions et notations 11

Introduction 13
Présentation générale 13
Résultats et organisation du texte 15

Introduction (English version) 21
Global presentation 21
Results and organization of the thesis 22

Chapitre 1. Rappels et résultats préliminaires 27
1.1. Rappels de la théorie des fibrés vectoriels adéliques 27
1.1.1. Premières définitions 27
1.1.2. Bases orthonormées et défaut d'hermitianité 28
1.1.3. Opérations sur les fibrés adéliques 29
1.1.4. Degré d'Arakelov et hauteur 30
1.1.5. Éléments de théorie des pentes adélique 31
1.1.6. Lemmes de Siegel 33
1.1.7. Convention 34
1.2. Groupe de Picard et diviseurs de Cartier 34
1.3. Métrique sur un fibré inversible 36
1.3.1. Premières définitions 36
1.3.2. Opérations sur les fibrés inversibles et métriques 36
1.3.3. Hauteur associée à un fibré inversible adélique 37
1.3.4. Hauteur des sections globales d'un fibré inversible adélique 38
1.4. Hauteur et degré des variétés 39
1.5. Minimums successifs sur une variété projective 40
1.5.1. Minimum absolu et dernier minimum 40
1.5.2. Autres minimums 41
1.6. Filtrations d'un espace vectoriel 42
1.6.1. Premières définitions 42
1.6.2. Semi-stabilité et sous-espace déstabilisant maximal 43

Partie 1. Approximation diophantienne sur les variétés projectives 47

Chapitre 2. Introduction 49
Introduction to part one (English version) 53

Chapitre 3. Théorème de Faltings et Wüstholz et théorie des pentes adéliques 57
3.1. Énoncé équivalent et étapes de la démonstration 57
3.2. Bonnes projections et indice d'une section 58
3.3. Théorème du produit de Faltings 60
3.4. Lemmes analytiques 61
3.5. Constructions préliminaires 63
3.5.1. Sous-variétés et filtrations induites 63
3.5.2. Espace vectoriel des sections auxiliaires 64

3.5.3. Structure de fibré adélique sur $\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)$ et minoration de $\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y))$. 66
3.5.4. Minoration de l'indice d'une section 69
3.6. Démonstration du théorème 3.1.1 74
3.7. Commentaires sur la démonstration du théorème 3.1.1 76

Chapitre 4. Une généralisation effective du théorème de Liouville 81
4.1. Introduction 81
4.2. Distance sur une variété projective et constante d'approximation. 83
4.3. L'approche de McKinnon et Roth 83
4.4. Variantes effectives du théorème de Faltings et Wüstholz 87
4.5. Le théorème de Liouville effectif : seconde approche 90
4.5.1. Cas général 90
4.5.2. Le cas de $\mathbb{P}^n$ 98

Partie 2. Théorie des formes linéaires de logarithmes dans le cas rationnel 101

Chapitre 5. Introduction 103
Introduction to part two (English version) 105

Chapitre 6. Résultats préliminaires sur les groupes algébriques commutatifs 107
6.1. Premières définitions 107
6.1.1. Polynôme de Hilbert-Samuel et degré d'une variété quasi-projective 107
6.1.2. Schémas en groupes 107
6.2. Groupe engendré par des sous-groupes algébriques 107
6.2.1. Décomposition de l'espace tangent 108
6.2.2. Majoration du degré d'un groupe engendré par des sous-groupes algébriques 108
6.3. Degré d'un sous-groupe et hauteur de l'espace tangent 109
6.3.1. Cas d'une variété abélienne 109
6.3.2. Cas d'un groupe linéaire 109
6.3.3. Cas général 111
6.4. Variante d'un résultat de Bertrand et Philippon 112

Chapitre 7. Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif dans le cas rationnel 115
7.1. Données générales 115
Plongements projectifs et exponentielle 115
Choix d'une structure de fibré adélique 116
Convention sur les constantes 116
Compléments sur l'exponentielle 116
Données du problème 117
7.2. Résultats 117
7.2.1. Cas général 117
7.2.2. Cas semi-abélien 118
7.2.3. Commentaires sur la démonstration 119
Convention sur les notations 120
7.3. Démonstration dans le cas semi-abélien 120
7.3.1. Choix d'un sous-groupe 120
7.3.2. Fibré adélique hermitien des sections auxiliaires 122
7.3.3. Lemme de multiplicités 123
7.3.4. Choix des paramètres 126
7.3.5. Étude de la matrice $\mathcal{A}_0$ 128
7.3.6. Construction d'une section auxiliaire 133
7.3.7. Construction d'un jet et premières estimations 134
7.3.8. Extrapolation 140
7.3.9. Encadrement de la hauteur du jet 147

7.3.10. Poids de la droite affine 149
7.3.11. Conclusion 150
7.4. Démonstration dans le cas général 152
7.4.1. Choix d'un sous-groupe 152
7.4.2. Fibré adélique hermitien des sections auxiliaires 154
7.4.3. Lemme de multiplicités 155
7.4.4. Choix des paramètres 157
7.4.5. Étude de la matrice $\mathcal{A}_0$ 158
7.4.6. Construction d'une section auxiliaire 160
7.4.7. Construction d'un jet et premières estimations 160
7.4.8. Majorations en les places $v|v_0$ 161
7.4.9. Conclusion 161

Bibliographie 163

Conventions et notations

Notations.

- Pour tout nombre réel a, on note $[a]$ la partie entière de a et $\log_+ a = \log\max\{1, a\}$, où log désigne le logarithme népérien.
- Si $\mathbf{x}= (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ alors $\mathbf{x}! := x_1! \cdots x_n!$ et $|\mathbf{x}| := x_1 + \cdots + x_n$.
- Si K est un corps, $\overline{K}$ désigne une clôture algébrique de K.
- Si Z est une variable aléatoire de carré intégrable, on note $\mathbb{E}(Z)$ son espérance et $\mathrm{Var}(Z)$ sa variance.
- Si E est un ensemble, on note $\mathbb{1}_A \colon E \to \{0, 1\}$ la fonction indicatrice d'un sous-ensemble A de E.
- Si $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ est un n-uplet d'éléments d'un corps K et si $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}^n$, alors $\mathbf{x}^{\mathbf{j}} := x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$. On note également
$$\mathcal{D}_{\mathbf{x}} = x_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + x_n \frac{\partial}{\partial z_n}$$
l'opérateur différentiel K-linéaire sur l'algèbre des polynômes $K[z_1, \dots, z_n]$, de coordonnées $\mathbf{x}$ dans la base $(\frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n})$. Si $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ est une base de K^n, on pose
$$\mathcal{D}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{j}} = \mathcal{D}_{b_1}^{j_1} \circ \cdots \circ \mathcal{D}_{b_n}^{j_n}.$$

Variétés algébriques. Soit K un corps. Nous dirons qu'un schéma X sur $\mathrm{Spec}(K)$ est une variété (algébrique) définie sur K si X est de type fini sur $\mathrm{Spec}(K)$ (éventuellement réductible). Une courbe algébrique est une variété algébrique de dimension 1. Une sous-variété de X est un sous-schéma fermé de X. On dit que X est une variété projective définie sur K si X est isomorphe à une sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^n_K$. Enfin, nous dirons que X est quasi-projective si $X = Z_1 \cap Z_2$, où Z_1 (respectivement Z_2) est un sous-schéma fermé (respectivement ouvert) d'un espace projectif $\mathbb{P}^n_K$.

Normes et valeurs absolues. Si K est un corps de nombres, on note $\Sigma_{K,f}$ l'ensemble des places finies de K, $\Sigma_{K,\infty}$ l'ensemble de ses places infinies, et $\Sigma_K = \Sigma_{K,f} \cup \Sigma_{K,\infty}$ l'ensemble des places de K. Si $v \in \Sigma_K$, on note K_v le complété de K en v, $\mathscr{O}_{K_v}$ l'anneau des entiers de K_v, et $\mathbb{C}_v$ le complété d'une clôture algébrique de K_v. Pour toute place $v \in \Sigma_K$, on note $|.|_v$ la valeur absolue sur K étendant la valeur absolue $|.|_v$ sur $\mathbb{Q}$: $|p|_v = p^{-1}$ si v est une place finie au dessus de p et la restriction de $|.|_v$ à $\mathbb{Q}$ est la valeur absolue usuelle si v est archimédienne. On désigne par $\mathbb{Q}_v$ le corps $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon le caractère p-adique, réel ou complexe non réel de v. On peut alors énoncer la formule du produit : pour tout $x \in K \setminus \{0\}$, on a
$$\prod_{v\in\Sigma_K} |x|_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]} = 1.$$
Soit n un entier naturel non nul et soit $v \in \Sigma_K$. Si $(z_1, \dots, z_n)$ est un vecteur de $\mathbb{C}_v^n$, on pose
$$|(z_1, \dots, z_n)|_{2,v} := \begin{cases} (\sum_{i=1}^{n} |z_i|_v^2)^{1/2} & \text{si } v \text{ est archimédienne,} \\ \max\{|z_1|_v, \dots, |z_n|_v\} & \text{sinon.} \end{cases}$$
Si v est une place de K, on note $a(v) = 1$ si v est archimédienne, et $a(v) = 0$ sinon.

Hauteur d'un point projectif. La formule du produit permet de définir la notion de hauteur d'un point projectif : si $x = (x_0 : \ldots : x_n) \in \mathbb{P}^n_K(\overline{\mathbb{Q}})$ est un point fermé, dont les coordonnées appartiennent à une extension finie L de K, on note $h(x)$ sa hauteur de Weil (logarithmique et absolue), définie par

$$h(x) = \sum_{v \in \Sigma_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log(\max\{|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}),$$

où $(x_0, \ldots, x_n)$ est un représentant quelconque de x. La hauteur d'un point fermé projectif ne dépend pas du choix du corps L. On dispose ainsi d'une notion de hauteur pour tout point $x \in \mathbb{P}^n(\overline{K})$ (où $\overline{K}$ désigne une clôture algébrique de K). Si X est une variété quasi projective et si $\iota \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ est un plongement fixé de X dans un espace projectif, on notera $h(x) = h(\iota(x))$ pour tout point $x \in X(\overline{K})$. Nous définirons une notion de hauteur plus générale associée à un fibré inversible adélique au paragraphe 1.3.3.

Introduction

Présentation générale

Le but de cette thèse est d'étudier des problèmes de géométrie diophantienne et d'établir de nouvelles mesures d'indépendance linéaire de logarithmes, au moyen d'outils issus de la théorie d'Arakelov.

Historiquement, la question fondamentale de l'approximation diophantienne est de déterminer avec quelle précision un nombre réel peut-être approché par des nombres rationnels. Concrètement, si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est un nombre réel algébrique, on cherche à déterminer le plus petit nombre $\tau > 0$ pour lequel il n'existe qu'un nombre fini de solutions rationnelles $p/q \in \mathbb{Q}$ à l'inéquation

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| < \frac{1}{q^{\tau+\varepsilon}} \tag{1}$$

pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$. En 1842, Dirichlet démontra la minoration $\tau \geq 2$ en utilisant son célèbre principe des tiroirs. La première majoration de l'exposant τ fut obtenue par Liouville, qui démontra en 1844 l'inégalité $\tau \leq [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$. L'amélioration de cette majoration constitua ensuite un enjeu majeur de la théorie des nombres. Le premier progrès significatif fut obtenu par Thue en 1909, qui prouva que $\tau \leq [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]/2+1$. Ce résultat fut successivement amélioré par Siegel en 1921, puis par Dyson et Gel'fond en 1947, jusqu'à ce que Roth démontre son célèbre théorème en 1955, donnant l'inégalité $\tau \leq 2$. Celle-ci est optimale d'après le théorème de Dirichlet.

Théorème (Roth, 1955). *Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel. Il n'existe qu'un nombre fini de nombres rationnels $p/q \in \mathbb{Q}$ tels que*

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

La démonstration que Liouville proposa en 1844 est élémentaire, mais sa structure a servi de modèle à ses améliorations successives. On considère un polynôme $f \in \mathbb{Z}[X]$, irréductible sur $\mathbb{Q}$, de degré $d := [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, et vérifiant $f(\alpha) = 0$. Comme f est irréductible, on a $f(p/q) \neq 0$ pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, et puisque $q^d f(p/q) \in \mathbb{Z}$, on a $|f(p/q)| \geq |q|^{-d}$. Par ailleurs, on peut expliciter une constante $b(\alpha) > 0$ et choisir le polynôme f de façon à ce que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, on ait $|f(p/q)| \leq b(\alpha)|\alpha - p/q|$. On en déduit que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, on a

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geq \frac{1}{b(\alpha)|q|^d}. \tag{2}$$

On déduit immédiatement de cette inégalité pour tout $\varepsilon > 0$, si $p/q \in \mathbb{Q}$ satisfait

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| < \frac{1}{q^{d+\varepsilon}}, \tag{3}$$

alors $q < b(\alpha)^{1/\varepsilon}$. En particulier il n'existe qu'un nombre fini de nombres rationnels satisfaisant (3). Remarquons que la constante $b(\alpha)$ est calculable ; le théorème de Liouville est dit effectif, car il permet de majorer la « taille » des solutions rationnelles de l'inégalité (2). L'idée qui permit à Thue d'obtenir la majoration $\tau \leq d/2 + 1$ fut de considérer une paire d'approximation au lieu d'une seule, en construisant un polynôme $f \in \mathbb{Z}[X, Y]$, dit polynôme « auxiliaire », à petits coefficients et s'annulant à un grand ordre en (α, α). Cette construction offre un plus grand degré de liberté dans la démonstration, et conduit à la majoration

$\tau \leq [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]/2 + 1$. Cependant, elle fait apparaître une difficulté importante, car dans ce cas il n'y a pas de raison que $f(p, q) \neq 0$ pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$. Thue surmonta ce problème au moyen d'un « lemme de zéros », en montrant que l'ordre d'annulation de f ne pouvait pas être trop élevé en (p, q), où $p/q \in \mathbb{Q}$. Pour démontrer son théorème, Roth considéra quant à lui un polynôme f à n variables, $n \geq 2$. Il introduisit un outil fondamental, aujourd'hui connu sous le nom de lemme de Roth (jouant le rôle du lemme de zéros), qui lui permit d'obtenir la borne $\tau \leq 2$. Signalons que contrairement au théorème de Liouville, le théorème de Roth n'est pas effectif. À ce jour, il n'existe pas de résultat effectif similaire (fournissant une constante explicite $b(\alpha)$ satisfaisant une inégalité analogue à (2)) pour un exposant $\tau < d$ indépendant de α. En 1972, Schmidt généralisa le théorème de Roth en dimension supérieure.

Théorème (Théorème du sous-espace de Schmidt). *Soit n un entier naturel non nul et soient $f_1, \dots, f_n$ des formes linéaires en n variables à coefficients algébriques. Supposons que les formes $f_1, \dots, f_n$ sont linéairement indépendantes. Soit $\delta > 0$. Alors l'ensemble des solutions de*

$$|f_1(x) \cdots f_n(x)| < (\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|)^{-\delta}, \ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$$

est contenu dans une union finie de sous-espaces linéaires propres de $\mathbb{Q}^n$.

On peut retrouver le théorème de Roth en appliquant ce résultat avec $n = 1$. La démonstration de Schmidt est difficile ; elle combine l'utilisation du lemme de Roth avec de profonds résultats de géométrie des nombres.

Le théorème de Liouville lui permit de donner les premiers exemples de nombres transcendants en 1844, en construisant explicitement des nombres réels α pour lesquels l'inégalité (3) a une infinité de solutions rationnelles. Étant donné un nombre complexe non nul, on peut naturellement se demander s'il est transcendant ou non. Cette question est délicate, et c'est Hermite qui y apporta la première contribution en démontrant la transcendance de la constante de Néper e en 1873. Par la suite, les travaux de Lindemann (1882, [**53**]) et de Weierstraß (1885, [**81**]) aboutirent à l'énoncé suivant.

Théorème (Lindemann-Weierstraß). *Soient $\beta_1, \dots, \beta_n$ des nombres algébriques linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors les nombres $e^{\beta_1}, \dots, e^{\beta_n}$ sont linéairement indépendants sur le corps $\overline{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques.*

Ce résultat entraîne la transcendance de π, car $e^{i\pi} + 1 = 0$. Plus généralement, on en déduit que toute détermination $\log \alpha$ du logarithme d'un nombre algébrique α non nul est un nombre transcendant. Dans la lignée de ces travaux, Hilbert fit la conjecture suivante en 1900, connue comme le 7ème problème sur sa célèbre liste des 23 : *si α est un nombre algébrique non nul et si $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ vérifie $e^u = \alpha$, alors pour tout $\beta \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$, on a $\alpha^\beta := e^{u\beta} \notin \overline{\mathbb{Q}}$.* Cette conjecture fut démontrée indépendamment par Gel'fond et Schneider en 1934.

Théorème (Gel'fond-Schneider). *Soient u_1, u_2 des nombres complexes d'exponentielle algébrique (i.e. $e^{u_1}, e^{u_2} \in \overline{\mathbb{Q}}$). Si la famille $\{u_1, u_2\}$ est $\mathbb{Q}$-libre, alors elle est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre.*

Il est naturel de se demander si l'on peut généraliser ce résultat à un nombre quelconque de nombres complexes $u_1, \dots, u_n$. Dans la seconde moitié des années 1960, Baker [**2, 3**] surmonta de façon remarquable les difficultés techniques qui empêchaient cette généralisation, et démontra le théorème suivant.

Théorème (Baker). *Soient $u_1, \dots, u_n$ des nombres complexes d'exponentielle algébrique. Alors la famille $\{u_1, \dots, u_n\}$ est $\mathbb{Q}$-libre si et seulement si $\{1, u_1, \dots, u_n\}$ est $\overline{\mathbb{Q}}$-libre.*

Nous n'allons pas détailler la méthode de Baker ici, mais le lecteur intéressé pourra en trouver une présentation dans le livre de Waldschmidt [**80**, § III.10]. Elle permet en réalité d'obtenir des énoncés quantitatifs, fournissant des minorations explicites de quantités de la forme $|\lambda_0 + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n|$, où $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des nombres algébriques et $u_1, \dots, u_n$ sont des logarithmes de nombres algébriques non nuls. Une telle minoration est appelée une mesure d'indépendance linéaire de logarithmes, et constitue l'objet principal de la théorie des formes linéaires de logarithmes.

Résultats et organisation du texte

Ce mémoire s'articule autour de deux axes principaux. D'une part, nous nous intéressons à des généralisations des théorèmes de Liouville et de Roth pour des points fermés définis sur une variété projective sur $\mathrm{Spec}(K)$, où K est un corps de nombres. Dans un second temps, nous établissons de nouvelles mesures d'indépendance linéaire de logarithmes dans le cadre général d'un groupe algébrique commutatif défini sur K. Un outil fondamental dans notre étude est la théorie des pentes des fibrés vectoriels hermitiens sur $\mathrm{Spec}\,\mathscr{O}_K$. Cette théorie a été introduite par Bost dans les années 90, et s'est depuis révélée extrêmement féconde dans ses applications à des problèmes de géométrie arithmétique. Nous travaillerons avec sa généralisation dans un cadre adélique, inspirée par Zhang [**86**] et développée par Gaudron dans [**36**]. Ce point de vue permet d'élargir le champ d'application de la théorie des pentes en considérant des fibrés vectoriels non nécessairement hermitiens, appelés fibrés vectoriels adéliques. Cette extension s'avère parfois indispensable pour des applications géométriques.

Le **premier chapitre** regroupe les notations et les rappels dont nous aurons besoin dans la suite. Le paragraphe 1.1 contient notamment les éléments de la théorie des pentes adéliques sur lesquels nous nous appuierons.

Ensuite vient la **première partie** de la thèse, consacrée à des généralisations des théorèmes de Roth et de Liouville pour des variétés projectives définies sur un corps de nombres K. En 1994, Faltings et Wüstholz [**26**] démontrèrent un théorème remarquable de géométrie diophantienne, qui donne une nouvelle démonstration du théorème du sous-espace de Schmidt (en particulier, il implique le théorème de Roth, comme nous le détaillerons à la page 50). Fixons une extension finie L de K et un ensemble fini $\mathscr{P} \subset \Sigma_L$. Soient ℓ, n deux entiers naturels non nuls. Pour toute place $w \in \mathscr{P}$, on considère une famille $(s_{w,j})_{1\leq j\leq \ell}$ d'éléments du L-espace vectoriel $V = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_K, \mathscr{O}(1)) \otimes_K L$ et l'on pose $V_k^{(w)} = \mathrm{Vect}\{s_{w,j} \mid k \leq j \leq \ell\}$ pour tout entier $1 \leq k \leq \ell$. Notons également $V_{\ell+1}^{(w)} = \{0\}$, et considérons une suite de nombres réels $0 \leq c_{w,1} < \cdots < c_{w,\ell}$. On construit ainsi une filtration $(V, \mathscr{F}_w)$ de V (voir le paragraphe 1.6), dont la pente $\mu_w(V)$ vérifie

$$\mu_w(V) = \frac{1}{\dim V} \sum_{j=1}^{\ell} c_{w,j} (\dim V_j^{(w)} - \dim V_{j+1}^{(w)}).$$

On munit le fibré inversible $\mathscr{O}(1)$ sur $\mathbb{P}^n_L$ d'une métrique $(\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K}$ vérifiant : pour toute section globale $s \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_L, \mathscr{O}(1))$ de $\mathscr{O}(1)$, correspondant à une forme linéaire f en $n+1$ variables à coefficients dans L, on a

$$\|s(x)\|_v = \frac{|f(x)|_v}{\max\{|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}}$$

pour tout point $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}^n(L)$ et pour toute place v de L. Quand la famille de filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ est semi-stable (voir la définition 1.6.5 page 44), le théorème 8.1 de [**26**] s'énonce de la façon suivante.

THÉORÈME A (Faltings et Wüstholz, 1994). *Supposons que $\sum_{w\in\mathscr{P}} \mu_w(V) > [L : \mathbb{Q}]$ et que la famille de filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ est semi-stable. Alors le système d'inégalités*

$$\|s_{w,j}(x)\|_w \leq \exp(-c_{w,j} h(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]), \quad \forall w \in \mathscr{P},\ \forall 1 \leq j \leq l, \tag{4}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions dans $\mathbb{P}^n(K)$.

En pratique, il peut s'avérer difficile de vérifier si l'hypothèse de semi-stabilité du théorème est vérifiée. Si elle ne l'est pas, ce théorème fournit cependant une sous-variété stricte Z de $\mathbb{P}^n_L$ en dehors de laquelle il n'y a qu'un nombre fini de solution (théorème 9.1 de [**26**]). La variété Z est définie comme le lieu de base du sous-espace déstabilisant maximal de la famille de filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ (défini au paragraphe 1.6.2). Cette sous-variété est donc théoriquement explicite, bien qu'il soit difficile de la déterminer en général. L'étude de variantes du théorème A constitue le fil conducteur de la première partie.

Nous commencerons par énoncer précisément le théorème 9.1 de [**26**] au **chapitre** 2 (théorème 2.0.1 page 49). Dans le **chapitre** 3, nous retrouvons ce théorème, essentiellement en transcrivant la preuve de Faltings et Wüstholz dans le formalisme des fibrés vectoriels adéliques. Nous donnerons d'abord un énoncé équivalent au théorème 2.0.1 (théorème 3.1.1 page 57), qui nous permettra de nous affranchir d'un choix de base fixé pour V. Ensuite vient la démonstration proprement dite, au cours de laquelle nous utiliserons de façon systématique les outils de la géométrie d'Arakelov, et plus particulièrement de la théorie des pentes adéliques. Nous terminerons le chapitre 3 en présentant des conséquences potentielles que pourrait avoir le raffinement de la démonstration que nous proposons, notamment en termes d'énoncés quantitatifs (§ 3.7).

Dans le **chapitre** 4, nous obtiendrons une généralisation effective du théorème de Liouville valable pour une variété projective, qui repose sur la démonstration de variantes effectives du théorème A. Récemment, McKinnon et Roth [**56**] ont appliqué le théorème A pour démontrer une généralisation du théorème de Roth valable pour des points fermés d'une variété projective X définie sur un corps de nombres K. Fixons un plongement $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et v une place de $\overline{K}$. McKinnon et Roth définissent une distance $d_v(.,.)$ sur $X(\overline{K}) \times X(\overline{K})$, définie en tirant en arrière une fonction sur $\mathbb{P}^n(\overline{K}) \times \mathbb{P}^n(\overline{K})$ qui est localement équivalente à la distance induite par la valeur absolue $|.|_v$ sur $\overline{K}^n$. Soit $\mathscr{L}$ un fibré inversible ample sur X, auquel on associe une hauteur (logarithmique) $h_{\mathscr{L}}$ comme dans [**45**, B.3.2]. On considère une extension finie L de K et un point fermé $x \in X(L)$. On note $\epsilon_x(\mathscr{L})$ la constante de Seshadri de $\mathscr{L}$ en x, qui est un invariant géométrique défini par Demailly [**18**] en 1990. Une conséquence du théorème principal de [**56**] est la suivante : pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il n'existe qu'un nombre fini de points $y \in X(K)$ tels que

$$\log d_v(x, y) < -\left(\frac{2[K:\mathbb{Q}]}{\epsilon_x(\mathscr{L})[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \varepsilon\right) h_{\mathscr{L}}(y)$$

(la normalisation de la hauteur et de la distance diffère de celle de [**56**]). En appliquant ce résultat à $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ et $\mathscr{L} = \mathscr{O}(1)$, on retrouve le théorème de Roth.

Nous démontrerons d'abord une version effective du théorème A dans le cas particulier où $\mathrm{card}(\mathscr{P}) = 1$. Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K, et soit $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K})$ un fibré adélique inversible sur X (voir la définition 1.3.3). Soit L une extension finie de K et soit $\mathscr{P}$ un sous-ensemble fini de Σ_L. Si $x \in X(K)$, on note $h_{\overline{\mathscr{L}}}(x)$ la hauteur de x associée à $\overline{\mathscr{L}}$ (§ 1.3.3), et si s est une section globale de $\mathscr{L} \otimes L$, on note $h(s)$ sa hauteur relativement aux normes $(\|.\|_{v,\sup})_{v\in\Sigma_L}$ associées à $\overline{\mathscr{L}}$ (§ 1.3.4). Soit F un sous-espace vectoriel de l'espace des sections globales de $\mathscr{L} \otimes L$. Notons $\mathscr{B}(F)$ le lieu de base de F et considérons une base $(s_1, \dots, s_{\dim F})$ de F. Avec ces notations, nous démontrerons le théorème suivant.

Théorème 1 (Théorème 4.4.1 page 87). *Pour chaque place w de $\mathscr{P}$, considérons deux nombres réels t_w, C_w, avec $C_w \neq 0$. Si $\delta := \sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w:\mathbb{Q}_w]}{[L:\mathbb{Q}]} t_w > 1$, alors tous les points $x \in (X \setminus \mathscr{B}(F))(K)$ satisfaisant le système d'inégalités*

$$\frac{\|s_j(x)\|_w}{\|s_j\|_{w,\sup}} \leq C_w \exp(-t_w h_{\overline{\mathscr{L}}}(x)), \quad \forall\ 1 \leq j \leq \dim F, \quad \forall\ w \in \mathscr{P} \tag{5}$$

vérifient

$$h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) \leq \frac{1}{\delta - 1}\left(\sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w:\mathbb{Q}_w]}{[L:\mathbb{Q}]} \log(C_w) + \max_{1\leq j\leq \dim F} h(s_j)\right).$$

En particulier, ces points sont en nombre fini si $\mathscr{L}$ est ample.

Le théorème est effectif, dans le sens où il fournit à la fois un lieu de base explicite en dehors duquel il n'y a qu'un nombre fini de solutions à (5), ainsi qu'une constante explicite majorant la hauteur de ces solutions. Nous donnerons plusieurs variantes du théorème 1 au paragraphe 4.4. Nous verrons également que dans le cas particulier où l'ensemble $\mathscr{P} = \{w\}$ ne contient qu'une place, ce théorème donne une version effective du théorème A de Faltings et Wüstholz (voir le corollaire 4.4.4 page 88 et la discussion qui suit sa démonstration). Le théorème 1 nous permettra de démontrer un résultat effectif inspiré des travaux de McKinnon et Roth. En gardant les notations précédentes, une conséquence du théorème principal du chapitre 4 nous permettra démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 2. *Soit $x \in X(L)$ un point régulier. Si $\mathscr{L}$ est ample, il existe une constante $c(x, \mathscr{L})$, pour laquelle on dispose d'une formule explicite, qui vérifie la propriété suivante. Pour tout $\varepsilon > 0$, tous les points $y \in X(K)$ tels que*

$$\log d_v(x, y) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\epsilon_x(\mathscr{L})[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \varepsilon\right) h_{\mathscr{L}}(y), \tag{6}$$

satisfont

$$h_{\mathscr{L}}(y) < -\frac{1}{\varepsilon} c(x, \mathscr{L}).$$

En particulier, il n'existe qu'un nombre fini de points $y \in X(K)$ vérifiant l'inégalité (6)*.*

Ce résultat est une généralisation effective du théorème de Liouville. Le résultat principal du chapitre 4 (théorème 4.5.2 page 92) est plus général, et peut s'interpréter comme une version effective d'un autre théorème récent de McKinnon et Roth [**57**]. Un autre argument nouveau du chapitre 4 est un analogue du lemme de Schwarz totalement explicite pour des sections d'un fibré inversible, permettant de comparer l'évaluation d'une section et la fonction distance $d_v(.,.)$ (valable pour une place archimédienne ou finie). Ce travail repose également sur des outils issus de la géométrie d'Arakelov, et notamment sur un résultat de Zhang [**85**], raffiné par Moriwaki [**60, 61**].

Dans la **deuxième partie**, nous établirons des mesures d'indépendance linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs. En notant $G = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m^n$ le produit du groupe additif avec n copies du groupe multiplicatif et t_G son espace tangent à l'origine (qui est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel), une mesure d'indépendance linéaire de logarithmes classique consiste en la minoration de la distance $d(u, V)$ entre :

- un vecteur $u = (1, u_1, \ldots, u_n)$ de $t_G \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, dont les coordonnées sont d'exponentielle algébrique ($e^{u_i} \in \overline{\mathbb{Q}}$ pour tout $i \in \{1 \ldots, n\}$) ;
- un hyperplan V de $t_G \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, défini comme le noyau d'une forme linéaire à coefficients algébriques.

Cette question peut être posée dans un cadre beaucoup plus général. Considérons maintenant un groupe algébrique G défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$, connexe et commutatif, et soit $\mathbf{p} \in G(\overline{\mathbb{Q}})$. Le groupe de Lie $G(\mathbb{C})$ possède un espace tangent à l'origine $t_G(\mathbb{C})$ (qui est un espace vectoriel de dimension $\dim G$) et une application exponentielle surjective $\exp\colon t_G(\mathbb{C}) \to G(\mathbb{C})$. Un logarithme u de $\mathbf{p}$ est un vecteur $u \in t_G(\mathbb{C})$ tel que $\exp(u) = \mathbf{p}$. Dans ce contexte, une mesure d'indépendance linéaire de logarithmes est une minoration de la distance $d(u, V)$ entre u et un hyperplan V de $t_G(\mathbb{C})$ défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$. On cherche à obtenir une telle minoration en fonction d'invariants associés aux données de départ, comme la hauteur $h(\mathbf{p})$ de $\mathbf{p}$ et la hauteur $h(V)$ de V (au sens des fibrés vectoriels adéliques, voir le paragraphe 1.1). Un des enjeux de la théorie des formes linéaires de logarithmes est d'obtenir une minoration de $d(u, V)$ qui soit raisonnable à la fois en termes de $h(V)$ et de $h(\mathbf{p})$. Selon les applications envisagées, on peut privilégier l'une ou l'autre de ces quantités dans les minorations que l'on démontre. La méthode de Baker peut-être adaptée dans ce contexte général grâce à un outil fondamental développé par Wüstholz ([**82**], théorème 2 ; voir aussi [**83**]) puis par Philippon [**64**] et Nakamaye [**62**], appelé lemme de multiplicités. Les premières minorations de formes linéaires de logarithmes dans le cadre général furent obtenues par Philippon et Waldschmidt [**66, 67**]. Des améliorations significatives ont ensuite été démontrées, notamment par Hirata-Kohno [**46**] et Gaudron [**33**]. Le *cas rationnel* de la théorie est celui où l'hyperplan V est l'espace tangent d'un sous-groupe algébrique de G. C'est un cas qui se révèle important pour les applications, et dans lequel on peut espérer obtenir de meilleures minorations pour la distance $d(u, V)$. Dans le contexte classique de la théorie, il correspond à l'étude de formes linéaires de logarithmes $\beta_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$ où les coefficients β_i sont des entiers relatifs et les u_i des logarithmes de nombres algébriques. Dans le cas rationnel, Gaudron [**35**] a établi la minoration suivante, au prix d'une hypothèse sur le point $\mathbf{p}$.

Théorème B (Gaudron, 2007). *Supposons que pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G tel que $t_{G'}(\mathbb{C}) + V \neq t_G(\mathbb{C})$, on ait $k\mathbf{p} \notin G'(\overline{K})$ pour tout entier naturel non nul k. Alors il existe une constante c indépendante de $h(\mathbf{p})$ et de $h(V)$ telle que*

$$\log d(u, V) \geq -c \max\{1, h(V)\}^{\dim G+2} \max\{1, h(\mathbf{p})\}^{\dim G}. \tag{7}$$

Cette mesure d'indépendance linéaire de logarithmes est la meilleure connue à ce jour en termes de $h(\mathbf{p})$ (dans les résultats antérieurs, le minorant était multiplié par une puissance entière de $\log h(\mathbf{p})$). En contrepartie, l'hypothèse faite sur le point $\mathbf{p}$ dans le théorème B est relativement stricte. En particulier, le théorème ne s'applique pas si $\mathbf{p}$ est un point de torsion. Cette hypothèse est précisément introduite pour exclure le cas dit *périodique*, et peut se reformuler de la façon suivante : pour tout sous-groupe algébrique G' de G tel que $t_{G'}(\mathbb{C}) + V \neq t_G(\mathbb{C})$ et pour tout entier naturel k non nul, alors $ku \notin t_{G'}(\mathbb{C}) + \Omega_G$ (où Ω_G désigne le noyau de l'exponentielle, appelé le réseau des périodes). Cette hypothèse garantit que les multiples de $\mathbf{p}$ n'appartiennent pas à certains sous-groupes de G, communément appelés *sous-groupes obstructeurs*. Dans les articles [**66**] et [**67**], Philippon et Waldschmidt ont introduit une méthode astucieuse pour traiter le cas périodique, basée sur une *extrapolation sur les dérivations* inspirée par les travaux de Gel'fond. Cet outil, devenu classique en théorie des formes linéaires de logarithmes, a l'inconvénient d'être assez lourd à mettre en place, en imposant notamment un choix de paramètres spécifique au cas périodique. De façon plus problématique, il s'avère que dans le cas qui nous intéresse, il ne permet pas de démontrer la minoration (7). En effet, si l'on inclut une extrapolation sur les dérivations dans la démonstration de [**35**], la mesure obtenue perd son intérêt en terme de la hauteur de $h(\mathbf{p})$, et n'améliore pas de résultat connu.

Dans ce travail, nous présentons une nouvelle méthode pour traiter le cas périodique. Cette approche repose sur la démonstration d'une variante d'un résultat de Bertrand et Philippon ([**4**, corollaire 2]). Ce dernier permet de comparer le degré $\deg(G')$ d'un sous-groupe algébrique G' de G avec la distance $d(\omega, t_{G'}(\mathbb{C}))$ séparant un élément $\omega \in \Omega_G \setminus t_{G'}(\mathbb{C})$ de l'espace tangent $t_{G'}(\mathbb{C})$ de G'. Ce résultat était déjà utilisé par Philippon et Waldschmidt dans leur article [**67**] au cours de leur extrapolation sur les dérivations. Dans la démonstration proposée ici, nous utilisons cet outil avec un point du vue opposé. Nous commencerons par démonter une généralisation du corollaire 2 de Bertrand et Philippon [**4**], qui s'applique à un point $\omega \in (t_G \setminus t_{G'})(\mathbb{C})$ qui n'est plus nécessairement une période (lemme 6.4.3 page 113). Grâce à une utilisation systématique du lemme 6.4.3, nous parvenons à exclure le cas périodique, en montrant que si la distance $d(u, V)$ ne satisfait pas la minoration voulue, alors les sous-groupes obstructeurs de G ne contiennent pas les multiples de $\mathbf{p}$. Une autre caractéristique de notre démonstration d'adopter, pour la première fois dans le contexte général d'un groupe algébrique commutatif quelconque, le schéma de démonstration novateur de l'article [**38**] de Gaudron (traitant du cas d'un groupe linéaire). Celui-ci combine des aspects de la méthode de Baker classique avec des outils de la théorie des pentes adéliques. Nous parvenons ainsi à retrouver le théorème principal de [**35**], en remplaçant l'hypothèse précédente par la condition naturelle $u \notin V$. Nous obtiendrons donc le théorème suivant.

Théorème 3. *Si u n'appartient pas à l'hyperplan V, il existe une constante c indépendante de $h(\mathbf{p})$ et de $h(V)$ telle que*

$$\log d(u, V) \geq -c \max\{1, h(V)\}^{\dim G+2} \max\{1, h(\mathbf{p})\}^{\dim G}.$$

Les résultats que nous obtiendrons dans la partie 2 seront bien plus généraux. En particulier, ils sont énoncés pour un sous-espace vectoriel V de dimension quelconque. Ils traitent donc du problème de la minoration *simutanée* de formes linéaires de logarithmes, qui correspond à l'étude de plusieurs formes linéaires dans le cas classique de la théorie. Par ailleurs, nous obtiendrons des énoncés bien plus précis dans la partie 2, qui généralisent tous les théorèmes de [**35**] (en supprimant l'hypothèse technique), tout en améliorant les mesures obtenues. Dans un souci de clarté, nous nous sommes restreints à un énoncé valable pour un point $u \in t_G(\mathbb{C})$ dans cette introduction. En réalité, nous démontrerons également des mesures analogues dans le cas ultramétrique, en travaillant sur un corps $\mathbb{C}_v$, où v est une place quelconque de K (archimédienne ou non), qui généralisent eux aussi ceux de [**35**].

Introduction (English version)

Global presentation

In this thesis, we study diophantine geometry problems on projective varieties and we establish new lower bounds for linear forms in logarithms, by means of tools drawn from Arakelov theory.

Historically, the fundamental problem in diophantine approximation was to know how well a real number can be approximated by rational numbers. More precisely, given an algebraic real number $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, one is looking for the smallest real number $\tau > 0$ for which there are only finitely many rational solutions $p/q \in \mathbb{Q}$ to the inequality

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{q^{\tau+\varepsilon}}, \tag{8}$$

where $\varepsilon > 0$ is a real number. In 1842, Dirichlet applied his celebrated box principle to establish the lower bound $\tau \geq 2$. The first upper bound for the exponent τ was obtained by Liouville in 1844, who proved the inequality $\tau \leq [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$. The sharpening of this bound has then been a major issue in number theory. Successive improvements were obtained by Thue (1909), Siegel (1921), Dyson and Gel'fond (1947), until Roth established the inequality $\tau \leq 2$ in 1955. This upper bound is optimal due to Dirichlet's theorem.

Theorem (Roth, 1955). *Let $\varepsilon > 0$ be a real number. There are only finitely many rational numbers $p/q \in \mathbb{Q}$ such that*

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

We will now sketch the proof of Liouville's result. Although this demonstration is elementary, it includes many of the important features that reappeared in the proofs of its refinements. We consider a polynomial $f \in \mathbb{Z}[X]$, irreducible over $\mathbb{Q}$, of degree $d := [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, and such that $f(\alpha) = 0$. By irreducibility, we have that $f(p/q) \neq 0$ for any $p/q \in \mathbb{Q}$, and since $q^d f(p/q) \in \mathbb{Z}$, we get $|f(p/q)| \geq |q|^{-d}$. Moreover, we can choose f such that for any $p/q \in \mathbb{Q}$, we have $|f(p/q)| \leq b(\alpha)|\alpha - p/q|$, where $b(\alpha) > 0$ is an explicit constant depending only on α. We deduce from this that for any rational number $p/q \in \mathbb{Q}$, the inequality

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \geq \frac{1}{b(\alpha)|q|^d} \tag{9}$$

is satisfied. Thus, for any $\varepsilon > 0$ and for any $p/q \in \mathbb{Q}$ such that

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| < \frac{1}{q^{d+\varepsilon}}, \tag{10}$$

we have $q < b(\alpha)^{1/\varepsilon}$. In particular, there are only finitely many rational numbers p/q with (10). Let us emphasize that one can give an explicit formula for the constant $b(\alpha)$ above; we say that Liouville's theorem is effective, because it provides a computable bound for the "size" of the rational solutions of (10). The main idea that allowed Thue to sharpen Liouville's result (leading to the upper bound $\tau \leq d/2 + 1$) was to consider a pair of approximations, by constructing a polynomial in two variables $f \in \mathbb{Z}[X, Y]$, with small coefficients and high order vanishing at (α, α). Let us remark that in this case one step fails in Liouville's demonstration, namely one can not ensure that $f(p, q) \neq 0$ for all $p/q \in \mathbb{Q}$. This led Thue to apply a "zero estimate" in order to obtain a contradiction. In his proof, Roth considered a polynomial f

in $n \geq 2$ variables, and introduced his celebrated Roth's lemma to replace the zero estimate used by Thue. Let us emphasize that these successive improvements of Liouville's theorem are however not effective ; there is currently no explicit similar result (providing a computable constant $b(\alpha)$ with (9)) for an exponent $\tau < d$ independent of α. The following theorem was proved by Schmidt in 1972, and extends Roth's theorem to higher dimensions.

Theorem (Schmidt's subspace theorem). *Let n be a positive integer and let $f_1, \ldots, f_n$ be linear forms in n variables with algebraic coefficients. We assume that the forms $f_1, \ldots, f_n$ are linearly independent and we consider a real number $\delta > 0$. Then the set of solutions to*

$$|f_1(x) \cdots f_n(x)| < (\max_{1 \leq i \leq n} |x_i|)^{-\delta}, \ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$$

is contained in the union of a finite number of proper subspaces of $\mathbb{Q}^n$.

In the special case where $n = 1$, one can recover Roth's theorem from the subspace theorem. The proof of Schmidt is difficult, and relies on deep results in geometry of numbers.

Liouville first proved the existence of transcendental numbers in 1844, by constructing examples of real numbers α for which (10) has infinitely many rational solutions. Given a nonzero complex number, one can naturally ask whether it is transcendental or not. This is a difficult question, and the first result in this direction was obtained by Hermite in 1873, who proved the transcendence of the Napier's constant e. Another important result is the following theorem, which arises from the works of Lindemann (1882, [**53**]) and Weierstraß (1885, [**81**]).

Theorem (Lindemann-Weierstraß). *Let $\beta_1, \ldots, \beta_n$ be algebraic numbers, linearly independent over $\mathbb{Q}$. Then $e^{\beta_1}, \ldots, e^{\beta_n}$ are linearly independent over the field $\overline{\mathbb{Q}}$ of algebraic numbers.*

In particular, this theorem implies that π is transcendental (because $e^{i\pi} + 1 = 0$), and more generally that any determination $\log \alpha$ of the complex logarithm of a nonzero algebraic number α is transcendental. In 1900, Hilbert proposed the following conjecture as the 7^{th} of his celebrated problems : *if α is a nonzero algebraic number and if $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ verifies $e^u = \alpha$, then for any $\beta \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}$, one has $\alpha^\beta := e^{u\beta} \notin \overline{\mathbb{Q}}$.* This question was solved independently by Gel'fond and Schneider in 1934.

Theorem (Gel'fond-Schneider). *Let u_1, u_2 be complex numbers with algebraic exponentials (i.e. $e^{u_1}, e^{u_2} \in \overline{\mathbb{Q}}$). If u_1, u_2 are linearly independent over $\mathbb{Q}$, then they are linearly independent over $\overline{\mathbb{Q}}$.*

In the 1960s, Baker [**2, 3**] extended this result to more than two logarithms, and proved the following theorem.

Theorem (Baker). *Let $u_1, \ldots, u_n$ be complex numbers with algebraic exponentials. Then $u_1, \ldots, u_n$ are linearly independent over $\mathbb{Q}$ if and only if $1, u_1, \ldots, u_n$ are linearly independent over $\overline{\mathbb{Q}}$.*

An exposition of Baker's method can be found in the book of Waldschmidt [**80**, § III.10]. This method actually provides quantitative results, i.e. explicit lower bounds for quantities of the form $|\lambda_0 + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n|$, where $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ are algebraic numbers and $u_1, \ldots, u_n$ are logarithms of nonzero algebraic numbers. Such a bound is called a measure of linear independence of logarithms.

Results and organization of the thesis

This dissertation is divided into two main parts. In the first one, we investigate diophantine geometry questions on projective varieties, and in the second one we establish new measures of linear independence of logarithms on a commutative algebraic group defined over a number field. A common feature in these two parts is the constant use of Arakelov geometry. More precisely, a fundamental tool in our study is the slope theory of hermitian vectors bundles on $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_K)$, where K is a number field. This theory has been introduced by Bost in the 1990s, and it turned out to be particularly fruitful in addressing arithmetic geometry issues since then. We will work with its generalization in an adelic setting, inspired by Zhang [**86**] and developed by Gaudron in [**36**]. This point of view allows one to consider vector bundles which are not necessarily hermitian, and thus expands the scope of applications of the slope theory. This extension is sometimes essential for geometric purposes.

The **first chapter** contains various preliminary results. In particular, the tools of adelic slope theory on which both parts of this dissertation rely can be found in section 1.1.

In the **first part**, we study variants of a remarkable theorem in diophantine geometry due to Faltings and Wüstholz [**26**]. The latter gives a new proof of Schmidt's subspace theorem (in particular, it implies Roth's theorem, as we will see on page 54). Let $K \subset L$ be two number fields, and let $\mathscr{P} \subset \Sigma_L$ be a finite set of places of L. We fix two positive integers ℓ, n and for each place $w \in \mathscr{P}$, we consider a family $(s_{w,j})_{1\leq j\leq \ell}$ of elements of $V := \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_L, \mathscr{O}(1))$. For all integer $1 \leq k \leq \ell$, we denote by $V_k^{(w)}$ the subspace of V spanned by the family $(s_{w,j})_{k\leq j\leq \ell}$. We also put $V_{\ell+1}^{(w)} = \{0\}$, and we consider real numbers $0 \leq c_{w,1} < \cdots < c_{w,\ell}$. In this way we get a filtration $(V, \mathscr{F}_w)$ of V (see section 1.6.1), whose slope $\mu_w(V)$ is defined as the real number

$$\mu_w(V) = \frac{1}{\dim V} \sum_{j=1}^{\ell} c_{w,j}(\dim V_j^{(w)} - \dim V_{j+1}^{(w)}).$$

We equip the line bundle $\mathscr{O}(1)$ on $\mathbb{P}^n_L$ with a metric $(\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K}$ with the following property : for any global section $s \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_L, \mathscr{O}(1))$ of $\mathscr{O}(1)$, associated to a linear form f in $n+1$ variables with coefficients in L, one has

$$\|s(x)\|_v = \frac{|f(x)|_v}{\max\{|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}}$$

for any point $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{P}^n(L)$ and for any place v of L. When the family of filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ is semi-stable (in the sense of definition 1.6.5, page 44), theorem 8.1 of [**26**] reads as follows.

Theorem A (Faltings and Wüstholz, 1994). *We assume that $\sum_{w\in\mathscr{P}} \mu_w(V) > [L : \mathbb{Q}]$ and that the family of filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ is semi-stable. Then there are only finitely many points $x \in \mathbb{P}^n(K)$ with*

$$\|s_{w,j}(x)\|_w \leq \exp(-c_{w,j}h(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]), \quad \forall w \in \mathscr{P},\ \forall 1 \leq j \leq l. \tag{11}$$

In practice, it can be difficult to check whether the semi-stability assumption of the theorem is satisfied or not. However, without this assumption, the theorem provides a proper subvariety Z outside of which the system of inequalities (11) has only finitely many K-rational solutions ([**26**, Theorem 9.1]). The variety Z is defined as the base locus of the maximal destabilizing subspace of the family of filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ (see section 1.6.2).

We will give the exact statement of theorem 9.1 of [**26**] in **chapter** 2. In **chapter** 3, we give a new proof of this theorem, essentially by transcribing the arguments of Faltings and Wüstholz in the formalism of adelic vector bundles. We will conclude chapter 3 with an outline of the potential consequences of a refinement of our proof, especially in terms of quantitative analogues of theorem A (see section 3.7).

In **chapter** 4, we prove an effective generalization of Liouville's theorem for a projective variety defined over a number field. Our result relies on the proof of an effective variant of theorem A. Recently, McKinnon and Roth [**56**] have applied theorem A to prove a strong generalization of Roth's theorem for closed points on a projective variety X defined over a number field K. Let $\overline{K}$ be an algebraic closure of K and let v be a place of $\overline{K}$. We fix an embedding $\iota\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ and we define a distance function $d_v(.,.)$ on $X(\overline{K}) \times X(\overline{K})$ by pulling back a function on $\mathbb{P}^n(\overline{K}) \times \mathbb{P}^n(\overline{K})$ which is locally equivalent to the distance induced by $|.|_v$ on $\overline{K}^n$. Let $\mathscr{L}$ be an ample line bundle on X and let $h_{\mathscr{L}} : X(\overline{K}) \to \mathbb{R}$ be an absolute logarithmic height function associated to $\mathscr{L}$ (see [**45**, B.3.2]). We consider a finite extension L of K and a closed point $x \in X(L)$. We denote by $\epsilon_x(\mathscr{L})$ the Seshadri constant of $\mathscr{L}$ at x, which is a geometric invariant defined by Demailly [**18**] in 1990. A consequence of the main theorem of [**56**] is the following : for any real number $\varepsilon > 0$, there exist only finitely many points $y \in X(K)$ such that

$$\log d_v(x,y) < -\left(\frac{2[K:\mathbb{Q}]}{\epsilon_x(\mathscr{L})[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \varepsilon\right) h_{\mathscr{L}}(y)$$

(the normalization of height and distance functions in [**56**] is not the same). When applied to the projective line $\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ with $\mathscr{L} = \mathscr{O}(1)$, one can check that this result implies Roth's theorem.

We will first prove an effective version of theorem A in the particular case where $\mathscr{P}$ has cardinality 1. Let X be a projective variety defined over a number field K, and let $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K})$ be an adelic line bundle on X (definition 1.3.3). Let L be a finite extension of K and let $\mathscr{P}$ be a finite subset of Σ_L. For a point $x \in X(K)$, we denote by $h_{\mathscr{L}}(x)$ the height of x relative to $\overline{\mathscr{L}}$ (see section 1.3.3), and if s is a global section of $\mathscr{L} \otimes L$, we denote by $h(s)$ its height with respect to the norms $(\|.\|_{v,\mathrm{sup}})_{v\in\Sigma_L}$ associated to $\overline{\mathscr{L}}$ (see section 1.3.4). Let F be a linear subspace of the L-vector space of global sections of $\mathscr{L} \otimes L$. We denote by $\mathscr{B}(F)$ the base locus of F, and we consider a basis $(s_1, \dots, s_{\dim F})$ for F. With these notations, we will prove the following theorem.

THEOREM 1 (Theorem 4.4.1, page 87). *For each place w of $\mathscr{P}$, we consider two real numbers t_w, C_w, with $C_w \neq 0$. If $\delta := \sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w:\mathbb{Q}_w]}{[L:\mathbb{Q}]} t_w > 1$, then for all points $x \in (X \setminus \mathscr{B}(F))(K)$ with*

$$\frac{\|s_j(x)\|_w}{\|s_j\|_{w,\mathrm{sup}}} \leq C_w \exp(-t_w h_{\mathscr{L}}(x)), \quad \forall\ 1 \leq j \leq \dim F, \quad \forall\ w \in \mathscr{P}, \tag{12}$$

we have

$$h_{\mathscr{L}}(x) \leq \frac{1}{\delta - 1}\left(\sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w:\mathbb{Q}_w]}{[L:\mathbb{Q}]}\log(C_w) + \max_{1\leq j\leq \dim F} h(s_j)\right).$$

In particular, there are only finitely many points $x \in (X \setminus \mathscr{B}(F))(K)$ satisfying (12) *if $\mathscr{L}$ is ample.*

This theorem is effective, in the sense that it gives both an explicit base locus outside of which (12) has only finitely many solutions, together with an explicit upper bound for the height of these solutions. We will give several variants of theorem 1 in section 4.4. We will see that when the set $\mathscr{P} = \{w\}$ contains only one place, this theorem gives an effective version of theorem A of Faltings and Wüstholz (see corollary 4.4.4 on page 88 and the discussion following its demonstration). In section 4.5, we will apply theorem 1 to derive an effective result inspired by the works of McKinnon and Roth. We keep the notations introduced above. A consequence of the main theorem of chapter 4 is the following.

THEOREM 2. *Let $x \in X(L)$ be a non-singular point. If $\mathscr{L}$ is ample, there exists a constant $c(x, \mathscr{L})$ (for which we will provide an explicit formula), such that for any $\varepsilon > 0$, all the points $y \in X(K)$ with*

$$\log d_v(x,y) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\epsilon_x(\mathscr{L})[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \varepsilon\right) h_{\mathscr{L}}(y), \tag{13}$$

satisfy

$$h_{\mathscr{L}}(y) < -\frac{1}{\varepsilon} c(x, \mathscr{L}).$$

In particular, there are only finitely many points $y \in X(K)$ satisfying (13).

This result is an effective generalization of Liouville's theorem. The main result of chapter 4 is more general, and it can be interpreted as an effective version of an other recent theorem of McKinnon and Roth [**57**]. Another new feature in chapter 4 is an analogue of Schwarz lemma for global sections of a line bundle, which is entirely explicit. This work also relies on tools from Arakelov geometry, and more precisely on a result of Zhang [**85**], refined by Moriwaki [**60, 61**].

In the **second part**, we establish new measures of linear independence of logarithms over a commutative algebraic group. We denote by $G = \mathbb{G}_a \times \mathbb{G}_m^n$ the product of the additive group with n copies of the multiplicative group, and we consider its tangent space t_G (which is a $\mathbb{Q}$-vector space). In the classical setting, a measure of linear independence of logarithms gives a lower bound for the distance $d(u, V)$ between :

- a vector $u = (1, u_1, \ldots, u_n)$ of $t_G \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, whose coordinates have algebraic exponentials : $e^{u_i} \in \overline{\mathbb{Q}}$ for all $i \in \{1, \ldots, n\}$;
- a hyperplane V of $t_G \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, defined as the kernel of a linear form with algebraic coefficients.

This problem can be stated in a much more general setting. We consider a commutative connected algebraic group G, defined over $\overline{\mathbb{Q}}$, and a point $\mathbf{p} \in G(\overline{\mathbb{Q}})$. The Lie group $G(\mathbb{C})$ comes with a tangent space at the origin $t_G(\mathbb{C})$ (which is a vector space of dimension $\dim G$) and an exponential map $\exp\colon t_G(\mathbb{C}) \to G(\mathbb{C})$ (which is onto). Let u be a logarithm of $\mathbf{p}$, i.e. a vector $u \in t_G(\mathbb{C})$ such that $\exp(u) = \mathbf{p}$. In this context, a measure of linear independence of logarithms is a lower bound for the distance $d(u, V)$ between u and a hyperplane V of $t_G(\mathbb{C})$ defined over $\overline{\mathbb{Q}}$. Usually, such a bound is expressed in terms of the height of the point $\mathbf{p}$ and the height of the hyperplane V (in the sense of adelic vector bundles, see section 1.1). It is possible to adapt Baker's method to this general context. A key stone in the argumentation is a « multiplicity estimate » on a commutative algebraic group, which is a fundamental tool in the theory of linear forms in logarithms developed by Wüstholz ([**82**, Theorem 2], [**83**]), Philippon [**64**], and Nakamaye [**62**]. The first linear independence measures for logarithms on an arbitrary commutative connected algebraic group were established by Philippon and Waldschmidt [**66, 67**]. Significant improvements were later obtained by Hirata-Kohno [**46**] and Gaudron [**33**]. The *rational case* of the theory is the one where the hyperplane V is the tangent space of an algebraic subgroup of G. In this case one can hope to get better lower bounds for $d(u, V)$, and it turns out to be particularly important for the applications of the theory. In the classical setting, it corresponds to the study of linear forms in logarithms $\beta_0 + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$ where the coefficients β_i are in $\mathbb{Z}$, and $u_1, \ldots, u_n$ are logarithms of nonzero algebraic numbers. In the rational case, Gaudron [**35**] proved the following theorem.

Theorem B (Gaudron, 2007). *Assume that for all connected algebraic subgroup G' of G such that $t_{G'}(\mathbb{C}) + V \neq t_G(\mathbb{C})$ and for all positive integer k, we have $k\mathbf{p} \notin G'(\overline{K})$. Then there exists a constant c, independent of $h(\mathbf{p})$ and $h(V)$, such that*

$$\log d(u, V) \geq -c \max\{1, h(V)\}^{\dim G + 2} \max\{1, h(\mathbf{p})\}^{\dim G}. \tag{14}$$

This measure is the best currently known in terms of $h(\mathbf{p})$ (previously, the lower bound was multiplied by a power of $\log h(\mathbf{p})$). However, the assumption made on the point $\mathbf{p}$ in the theorem is relatively strong. In particular, theorem B can not be applied if $\mathbf{p}$ is a torsion point. The condition of theorem B is essential in the demonstration in order to exclude the so-called *periodic case* ; it ensures that none of the multiples of $\mathbf{p}$ belong to particular subgroups of G, called *obstruction subgroups.* It can be reformulated as follows : for all connected algebraic subgroup G' of G such that $t_{G'}(\mathbb{C}) + V \neq t_G(\mathbb{C})$ and for all positive integer k, we have $ku \notin t_{G'}(\mathbb{C}) + \Omega_G$, where Ω_G is the kernel of the exponential map (called the lattice of *periods*). In their articles [**66**] and [**67**], Philippon and Waldschmidt have introduced a method to deal with the periodic case, by the mean of an *extrapolation on derivations* inspired by the works of Gel'fond. This tool, which has become classical in the theory of linear forms in logarithms, is unfortunately relatively heavy to set up in general. More problematically, it turns out that if we include an extrapolation on derivations in the proof of the main theorem of [**35**], the lower bound we obtain is strongly weakened in terms of the height of $\mathbf{p}$, and does not improve already known results.

In this work, we present a new approach to deal with the periodic case. It relies on the proof of a variant of a result due to Bertrand and Philippon [**4**, Corollary 2]. The latter provides an inequality involving the degree $\deg(G')$ of an algebraic subgroup G' of G and the distance $d(\omega, t_{G'}(\mathbb{C}))$ between an element $\omega \in \Omega_G \setminus t_{G'}(\mathbb{C})$ and the tangent space $t_{G'}(\mathbb{C})$.

This result was already used by Philippon and Waldschmidt throughout their extrapolation on derivations in their article [**67**]. In our approach, we apply this tool with a very different point of view. We will first extend corollary 2 of Bertrand and Philippon [**4**] to the more general case where the point $\omega \in (t_G \setminus t_{G'})(\mathbb{C})$ is not necessarily a period (lemma 6.4.3, page 113). We then deduce from lemma 6.4.3 that if the distance $d(u,V)$ is too small, then no multiple of $\mathbf{p}$ belongs to an obstruction subgroup of G. Thus, we are able to exclude the periodic case. Another new feature of our work is to adopt, for the first time in this general context, the novel approach of the article [**38**] of Gaudron (which deals with linear groups). It combines Baker's method with modern tools of adelic slope theory. This will lead us to recover theorem B, without the assumption on $\mathbf{p}$.

Theorem 3. *If u doesn't belong to the hyperplane V, there exists a constant c, independent of $h(\mathbf{p})$ and $h(V)$, such that*

$$\log d(u,V) \geq -c \max\{1, h(V)\}^{\dim G+2} \max\{1, h(\mathbf{p})\}^{\dim G}.$$

We will actually prove much more general results, which apply for subspaces V of any dimension ; this is the question of simultaneous measures of linear independence of logarithms, which corresponds to the study of several linear forms in the classical setting. Moreover, our results will be made much more precise in part 2. They generalize all the theorems of [**35**] (since they apply without the technical hypothesis on $\mathbf{p}$), and they also improve the lower bounds. For the sake of clarity, we have assumed that the vector u belonged to the complex vector space $t_G(\mathbb{C})$ in this introduction. However, we will also prove ultrametric analogues of theorem 3, by working over a field $\mathbb{C}_v$, where v is any place of K (archimedean or not).

Chapitre 1

Rappels et résultats préliminaires

Ce chapitre regroupe les définitions et les rappels dont nous aurons besoin dans la suite. Signalons que la seconde partie de cette thèse utilise uniquement les résultats du paragraphe 1.1.

1.1. Rappels de la théorie des fibrés vectoriels adéliques

Soit K un corps de nombres. L'objectif de cette partie est de rappeler quelques éléments de la théorie des pentes des fibrés vectoriels hermitiens sur Spec $\mathscr{O}_K$, introduite par Bost dans les années 90. Nous présentons ici ces notions dans le cadre plus souple des fibrés vectoriels adéliques. Cette généralisation a été dévelopée par Gaudron dans l'article [**36**], dont la plupart des définitions et des résultats présentés ici sont issus.

1.1.1. Premières définitions.

Définition 1.1.1. Un fibré (vectoriel) adélique sur K est la donnée $\overline{E} = (E, \|.\|_v)_{v\in\Sigma_K}$ d'un K-espace vectoriel E et, pour chaque place v de K, d'une norme $\|.\|_v$ sur $E \otimes_K \mathbb{C}_v$ satisfaisant les conditions suivantes :

(1) il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E sur K et une partie finie $\mathcal{S}$ de $\Sigma_{K,f}$ telle que $\|a_1e_1 + \ldots + a_ne_n\|_v = \max(|a_1|_v, \ldots, |a_n|_v)$ pour toute place $v \in \Sigma_{K,f} \setminus \mathcal{S}$ et pour tout vecteur $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}_v^n$;

(2) pour toute place $v \in \Sigma_K$, la norme $\|.\|_v$ est invariante sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$: si $(s_1, \ldots, s_n)$ désigne une base de $E \otimes_K K_v$ sur K_v, alors
$$\|\sigma(a_1)s_1 + \ldots + \sigma(a_n)s_n\|_v = \|a_1s_1 + \ldots + a_ns_n\|_v$$
quels que soient $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}_v^n$;

(3) si $v \in \Sigma_f$, alors la norme $\|.\|_v$ est ultramétrique :
$$\|s + s'\|_v \leq \max(\|s\|_v, \|s'\|_v) \quad \forall\ s, s' \in E \otimes_K \mathbb{C}_v.$$

Si E est de dimension 1, nous dirons que $\overline{E}$ est un fibré en droites adélique sur K.

Définition 1.1.2. Un fibré adélique $(E, (\|.\|_{E,v})_{v\in\Sigma_K})$ est dit pur si pour toute place v de K et tout x dans E, la norme $\|x\|_{E,v}$ appartient à $|K_v|_v$ (remarquons que cette condition est automatiquement vérifiée pour les places archimédiennes de K). Un fibré adélique est dit hermitien s'il est pur et si les normes aux places archimédiennes de K sont hermitiennes.

L'anneau des adèles de K est défini par
$$K_{\mathbf{A}} = \left\{ x = (x_v)_{v\in\Sigma_K} \in \prod_{v\in\Sigma_K} K_v \mid x_v \in \mathscr{O}_{K_v} \text{ sauf pour un nombre fini de } v \in \Sigma_K \right\}.$$
En termes plus concrets, un fibré adélique hermitien $(E, (\|.\|_{E,v})_v)$ sur K de dimension n est la donnée d'un K-espace vectoriel E de dimension n muni, pour chaque place v de K, d'une norme $\|.\|_{E,v}$ sur $E \otimes_K \mathbb{C}_v$ satisfaisant la condition suivante : il existe une K-base $(e_1, ..., e_n)$ de E et une matrice adélique $a = (a_v)_{v\in\Sigma_K} \in GL_n(K_{\mathbf{A}})$ telles que, pour toute place $v \in \Sigma_K$, la norme sur $E \otimes_K \mathbb{C}_v$ est donnée par
$$\forall\ \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}_v^n, \quad \|\sum_{i=1}^n x_ie_i\|_{E,v} = |a_v(\mathbf{x})|_{2,v}.$$

Exemple 1.1.3. Soit n un entier naturel non nul. On munit l'espace vectoriel K^n d'une structure naturelle de fibré adélique hermitien en considérant la norme $|.|_{2,v}$ sur $\mathbb{C}_v^n$ pour chaque place v de K. Nous dirons dans ce cas que K^n est muni de la structure triviale de fibré adélique. Soit E est un espace vectoriel de dimension n et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Cette base permet d'identifier E à K^n, et fournit ainsi une structure de fibré adélique hermitien $(E, (\|.\|_{E,v})_{v\in\Sigma_K})$ à E. Pour chaque place v de Σ_K la norme $\|.\|_{E,v}$ obtenue est donnée par :

$$\forall\ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}_v^n, \quad \|z_1e_1 + \cdots + z_ne_n\|_{E,v} = |(z_1, \ldots, z_n)|_{2,v}.$$

1.1.2. Bases orthonormées et défaut d'hermitianité. Soit $\overline{E} = (E, (\|.\|_{E,v})_{v\in\Sigma_K})$ un fibré adélique de dimension $r \geq 1$.

Définition 1.1.4. Soit v une place de K. Une base $(e_1, \ldots, e_r)$ de $E \otimes_K \mathbb{C}_v$ est dite orthogonale pour la norme $\|.\|_v$ si

$$\|a_1e_1 + \cdots + a_re_r\|_{E,v} = \begin{cases} (\sum\limits_{i=1}^{r} \|a_ie_i\|_{E,v}^2)^{1/2} & \text{si } v \text{ est archimédienne,} \\ \max_{1\leq i\leq r} \|a_ie_i\|_v & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour toute famille $(a_i)_{1\leq i\leq r}$ d'éléments de $\mathbb{C}_v$. Si de plus la base vérifie $\|e_i\|_{E,v} = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, on dit qu'elle est orthonormée.

Lorsque $\overline{E}$ est hermitien, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire une base orthonormée de $E \otimes_K \mathbb{C}_v$ pour toute place archimédienne v de K. Cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas ultramétrique. Cependant, on dispose de l'analogue asymptotique suivant.

Proposition 1.1.5 (Corollaire de la proposition 3.1 de [**14**]). *Soit v une place ultramétrique de K et soit $\alpha \in [0, 1[$ un nombre réel. Soit L_v une extension complète de K (pour la valeur absolue $|.|_v$). Considérons un drapeau complet*

$$E \otimes_K L_v = E_r \supsetneq E_{r-1} \supsetneq \cdots \supsetneq E_1 \supsetneq \{0\}$$

de $E \otimes_K L_v$. Alors il existe une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_r)$ de $E \otimes_K L_v$ telle que

$$\alpha \max_{1\leq i\leq r} \|a_ie_i\|_{E,v} \leq \|a_1e_1 + \cdots + a_re_r\|_{E,v} \leq \max_{1\leq i\leq r} \|a_ie_i\|_{E,v}$$

pour toute famille $(a_i)_{1\leq i\leq r}$ d'éléments de L_v, et vérifiant $\mathrm{card}(E_i \cap \mathbf{e}) = i$ *pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.*

Signalons que la proposition 3.1 de [**14**] est plus générale, car elle donne un résultat valable pour un corps quelconque muni d'une valeur absolue ultramétrique. Par ailleurs, remarquons que si $\overline{E}$ est pur, la base $\mathbf{e}$ de la proposition 1.1.5 peut être choisie telle que $\|e_i\|_{E,v} = 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Nous allons maintenant définir le défaut d'hermitianité de $\overline{E}$. Soit v une place de K. Pour toute K_v-base $(e_1, \ldots, e_r)$ de $E \otimes_K K_v$, on définit le nombre réel $\delta(e_1, \ldots, e_r)$ comme la borne inférieure des produits ab, où a et b appartiennent à $|K_v|_v$ et vérifient : pour tout $x = \sum_{i=1}^r x_ie_i \in E \otimes_K K_v$, on a

$$a^{-1}|(x_1, \ldots, x_r)|_{2,v} \leq \|x\|_{E,v} \leq b|(x_1, \ldots, x_r)|_{2,v}.$$

On notera $\delta_v(\overline{E})$ la borne inférieure des quantités $\delta(e_1, \ldots, e_r)$, où $(e_1, \ldots, e_r)$ parcourt les K_v-bases de $E \otimes_K K_v$. D'après la proposition 1.1.5, on a $\delta_v(\overline{E}) = 1$ pour toute place ultramétrique de K lorsque $\overline{E}$ est pur. Dans ce cas, on a donc

$$\prod_{v\in\Sigma_K} \delta_v(\overline{E})^{[K_v:\mathbb{Q}_v]/[K:\mathbb{Q}]} = \prod_{v\in\Sigma_{K,\infty}} \delta_v(\overline{E})^{[K_v:\mathbb{Q}_v]/[K:\mathbb{Q}]} \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.1.6. Le défaut d'hermitianité (normalisé) de $\overline{E}$ est la quantité

$$\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}) = \prod_{v\in\Sigma_{K,\infty}} \delta_v(\overline{E})^{[K_v:\mathbb{Q}_v]/[K:\mathbb{Q}]}.$$

Cette quantité mesure la distance séparant $\overline{E}$ d'un fibré adélique hermitien, et l'on a $\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}) = 1$ si et seulement si $\overline{E}$ est hermitien. Dans le cas général, on a l'encadrement $1 \leq \Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}) \leq (2 \dim E)^{1/2}$ (voir [**36**, page 51] ; remarquons que dans l'article [**36**], le défaut d'hermitianité n'est pas normalisé par le degré du corps de nombres).

1.1.3. Opérations sur les fibrés adéliques. Considérons deux fibrés vectoriels adéliques $\overline{E} = (E, (\|.\|_{E,v})_v)$, $\overline{F} = (F, (\|.\|_{F,v})_v)$ sur K. Notons $r = \dim E$ et $s = \dim F$.

Sous-fibré et quotient. Nous dirons que $\overline{F}$ est un sous-fibré adélique de $\overline{E}$ si $F \subset E$ et si la structure de fibré adélique de F correspond à celle induite par celle de E : pour chaque place v de K la norme $\|.\|_{F,v}$ correspond à la restriction de $\|.\|_{E,v}$ à $F \otimes_K \mathbb{C}_v$. Si $\overline{F}$ est un sous-fibré adélique de $\overline{E}$, nous noterons $\overline{F} \subset \overline{E}$. Dans ce cas, on peut construire le fibré adélique $\overline{E}/\overline{F} = (E/F, (\|.\|_{E/F,v})_v)$, en considérant les normes quotient : si v est une place de K et si $\overline{x}$ est un élément de $(E/F) \otimes_K \mathbb{C}_v$, alors

$$\|\overline{x}\|_{E/F,v} = \inf\{\|x\|_{E,v} \mid x \in E \otimes_K \mathbb{C}_v,\ \overline{x} = x \bmod F \otimes_K \mathbb{C}_v\}.$$

Fibré dual. On définit le fibré adélique dual de $\overline{E}$, noté $\overline{E}^{\vee}$, donné par les normes d'opérateurs

$$\|\varphi\|_v = \sup\left\{\frac{|\varphi(x)|_v}{\|x\|_{E,v}} \mid x \in (E \otimes \mathbb{C}_v)\backslash\{0\}\right\},$$

où φ est un élément de $(E \otimes \mathbb{C}_v)^{\vee}$. De façon plus générale, on peut munir le K-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_K(E, F)$ d'une structure de fibré adélique en considérant pour chaque place v de K la norme d'opérateur sur $\mathrm{Hom}_K(E, F) \otimes_K \mathbb{C}_v$ définie par

$$\|\varphi\|_v = \sup\left\{\frac{\|\varphi(x)\|_{F,v}}{\|x\|_{E,v}} \mid x \in (E \otimes_K \mathbb{C}_v) \setminus \{0\}\right\}.$$

Somme directe. On définit le fibré adélique $\overline{E} \oplus \overline{F}$ d'espace sous-jacent $E \oplus F$ et de normes

$$\|(x, y)\|_{E \oplus F,v} = \begin{cases} (\|x\|^2_{\overline{E},v} + \|y\|^2_{\overline{F},v})^{1/2} & \text{si } v \text{ est archimédienne,} \\ \max\{\|x\|_{\overline{E},v}, \|y\|_{\overline{F},v}\} & \text{si } v \text{ est ultramétrique,} \end{cases}$$

pour tous $x \in E \otimes \mathbf{C}_v$ et $y \in F \otimes \mathbf{C}_v$. Si $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont hermitiens, alors $\overline{E} \oplus \overline{F}$ est hermitien.

Produit tensoriel. L'espace vectoriel $E \otimes_K F$ est isomorphe à $\mathrm{Hom}_K(E^{\vee}, F)$. On pourrait donc munir $E \otimes_K F$ de la structure de fibré adélique induite par celle de $\mathrm{Hom}_K(E^{\vee}, F)$. Cependant, contrairement au cas de la somme directe, si $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont hermitiens, alors cette construction ne fait pas de $E \otimes_K F$ un fibré adélique hermitien en général (voir [**36**, page 43]). Pour pallier à ce problème, il suffit de choisir des normes convenables en les places archimédiennes, comme dans [**38**, § 3.3] : soit $v \in \Sigma_K$ une place archimédienne et soient $(e_1, \ldots, e_r)$ et $(f_1, \ldots, f_s)$ des bases orthonormées des espaces vectoriels $E \otimes_K \mathbb{C}_v$ et $F \otimes_K \mathbb{C}_v$ respectivement. On munit alors l'espace vectoriel $E \otimes_K F \otimes_K \mathbb{C}_v$ de l'unique norme $\|.\|_{E \otimes_K F,v}$ rendant la base $(e_i \otimes f_j)_{1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s}$ orthonormée :

$$\forall\ (x_{i,j}) \in \mathbb{C}_v^{rs},\ \|\sum_{i,j} x_{i,j} e_i \otimes f_j\|_{E \otimes_K F,v} := |(x_{i,j})_{i,j}|_{2,v}.$$

En les places ultramétriques, on définit la norme $\|.\|_{E \otimes_K F,v}$ sur $E \otimes_K F \otimes_K \mathbb{C}_v$ induite par l'isomorphisme $E \otimes_K F \simeq \mathrm{Hom}_K(E^{\vee}, F)$. On note alors $\overline{E} \otimes_K \overline{F} = (E \otimes_K F, (\|.\|_{E \otimes_K F,v})_v)$ le fibré adélique obtenu. Si $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont hermitiens, alors il en est de même de $\overline{E} \otimes_K \overline{F}$.

Puissance symétrique et puissance extérieure. Si ℓ est un entier naturel, nous noterons $S^{\ell}(E)$ sa puissance symétrique ℓ-ième de l'espace vectoriel E. C'est un quotient de $E^{\otimes \ell}$, que l'on peut donc munir de la structure de fibré adélique induite par celle de $\overline{E}^{\otimes \ell}$. Nous noterons $S^{\ell}(\overline{E})$ le fibré adélique correspondant. On peut expliciter la norme $\|.\|_{S^{\ell}\overline{E},v}$ pour une place archimédienne v de K. Si $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base orthonormée de $E \otimes_K \mathbb{C}_v$, alors la base $\{e_1^{i_1} \cdots e_r^{i_r} \mid \mathbf{i} = (i_j)_{1 \leq j \leq r} \in \mathbb{N}^r,\ |\mathbf{i}| = \ell\}$ de $S^{\ell}(E)$ est orthogonale et la norme de ses éléments vérifie

$$\|e_1^{i_1} \cdots e_r^{i_r}\|_{S^{\ell}\overline{E},v} = \left(\frac{\mathbf{i}!}{\ell!}\right)^{1/2}$$

(voir [**36**, page 46]). Si $\ell \leq r = \dim E$, la ℓ-ième puissance extérieure $\bigwedge^\ell E$ de E est également un quotient de $E^{\otimes \ell}$. Pour toute place ultramétrique v de K, on munit l'espace vectoriel $(\bigwedge^\ell E) \otimes_K \mathbb{C}_v$ de la norme quotient $\|.\|_{\bigwedge^\ell E,v}$ induite par $\|.\|_{E^{\otimes \ell},v}$. Si v est une place archimédienne de K et si $(e_1, \ldots, e_r)$ est une base orthonormée de $E \otimes_K \mathbb{C}_v$ pour la norme $\|.\|_{E,v}$, on note $\|.\|_{\bigwedge^\ell E,v}$ l'unique norme sur $(\bigwedge^\ell E) \otimes_K \mathbb{C}_v$ rendant la base $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_\ell} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq r\}$ orthonormée. Remarquons que contrairement au cas des places ultramétriques, cette norme n'est pas exactement la norme quotient de $\|.\|_{E^{\otimes \ell},v}$ (un facteur $\sqrt{\ell!}$ différencie ces normes, voir [**40**, page 572]). Ces définitions fournissent une structure de fibré vectoriel adélique à $\bigwedge^\ell E$, et on note $\bigwedge^\ell \overline{E}$ le fibré adélique ainsi construit. En particulier, le déterminant $\det E = \bigwedge^{\dim E} E$ est muni d'une structure de fibré adélique (notée $\det \overline{E}$). Si $\overline{E}$ est un fibré adélique hermitien, alors $S^\ell \overline{E}$ et $\bigwedge^\ell \overline{E}$ sont hermitiens.

1.1.4. Degré d'Arakelov et hauteur. Considérons un fibré adélique non nul $\overline{E} = (E, (\|.\|_{E,v})_{v \in \Sigma_K})$ sur K et posons $r = \dim E$. Rappelons que l'on a noté $K_{\mathbf{A}}$ l'anneau des adèles de K. Considérons la boule

$$\mathbb{B}_{\overline{E}}(0,1) := \{x = (x_v)_{v \in \Sigma_K} \in E \otimes_K K_{\mathbf{A}} \mid \|x_v\|_{E,v} \leq 1 \ \forall \ v \in \Sigma_K\}$$

et fixons une mesure de Haar vol sur le groupe localement compact $(K_{\mathbf{A}}^r, +)$ (voir l'appendice au chapitre 2 de [**70**]).

Définition 1.1.7. Soit $\phi \colon E \to K^r$ un isomorphisme. Notons $\overline{F} = (K^r, (|.|_{2,v})_{v \in \Sigma_K})$ le fibré adélique trivial de dimension r. Le degré d'Arakelov (normalisé) de $\overline{E}$ est le nombre réel

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E}) := \log \left(\frac{\mathrm{vol}(\phi(\mathbb{B}_{\overline{E}}(0,1))}{\mathrm{vol}(\mathbb{B}_{\overline{F}}(0,1))} \right).$$

Par convention, on pose $\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\{0\}) = 0$. La hauteur $h(\overline{E})$ de $\overline{E}$ est alors définie par $h(\overline{E}) := -\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E})$.

Comme toutes les mesures de Haar sur $(K_{\mathbf{A}}^r, +)$ sont proportionnelles (voir [**70**, page 115]), cette définition ne dépend pas du choix de la mesure vol. Par la formule du produit, elle est également indépendante du choix de l'isomorphisme $\phi \colon E \to K^r$. Nous disposons également d'expressions alternatives du degré d'un fibré adélique, que nous résumons maintenant.

Lemme 1.1.8 (Lemme 4.4 de [**36**]). *Si $\overline{E}$ un fibré en droites adélique sur K, alors pour tout vecteur non nul s de E, on a l'égalité*

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E}) := - \sum_{v \in \Sigma_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|s\|_{E,v}.$$

Proposition 1.1.9 (Corollaire 4.10 de [**36**]). *Si le fibré adélique $\overline{E}$ est hermitien, alors on a*

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E}) := \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\det \overline{E}).$$

Le résultat suivant est un cas particulier des propositions 4.19, 4.22 et 4.23 de [**36**].

Proposition 1.1.10.
(1) *Supposons que $\overline{E}$ est hermitien. Si $\overline{F} \subset \overline{E}$ est un sous-fibré adélique de $\overline{E}$, alors on a l'égalité*

$$h(\overline{E}/\overline{F}) = h(\overline{E}) - h(\overline{F}).$$

(2) *Supposons que $\overline{E}$ est pur. Si $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ sont deux sous-fibré adéliques de $\overline{E}$, alors on a*

$$h(\overline{E}_1 \oplus \overline{E}_2) = h(\overline{E}_1) + h(\overline{E}_2)$$

et

$$h(\overline{E_1 + E_2}) + h(\overline{E_1 \cap E_2}) \leq h(\overline{E}_1) + h(\overline{E}_2) + \dim(E_1 + E_2) \log \Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E_1 + E_2}).$$

Si K' est une extension finie de K, alors pour toute place $v' \in \Sigma_{K'}$ au dessus d'une place v de K, on considère la norme $\|.\|_{E,v'}$ définie de la façon suivante. Si $\sigma' \colon K' \hookrightarrow \mathbb{C}_v$ et $\sigma \colon K \hookrightarrow \mathbb{C}_v$ sont des plongements associés respectivement à v' et v, alors pour toutes familles finies d'éléments $e_i \in E$, $x_i \in K'$, $y_i \in \mathbb{C}_v$, on pose

$$\left\| \sum_i (e_i \otimes_K x_i) \otimes_{\sigma'} y_i \right\|_{E,v'} = \left\| \sum_i e_i \otimes_\sigma (\sigma'(x_i) y_i) \right\|_{E,v}.$$

Définition 1.1.11. Soit K' une extension finie de K et soit $s \in E \otimes_K K'$ un vecteur non nul. La hauteur (logarithmique, absolue) de s est définie par

$$h_{\overline{E}}(s) = \sum_{v \in \Sigma_{K'}} \frac{[K'_v : \mathbb{Q}_v]}{[K' : \mathbb{Q}]} \log \|s\|_{E,v}.$$

La hauteur de s sera notée plus simplement $h(s)$ si aucune confusion n'est possible. Par la formule du produit, $h(\lambda s) = h(s)$ pour tout $\lambda \in (K')^\times$. Cette définition est également invariante par extension finie de corps. En effet, si L/K' est une extension finie, alors

$$\begin{aligned}\sum_{v \in \Sigma_{K'}} \frac{[K'_v : \mathbb{Q}_v]}{[K' : \mathbb{Q}]} \log \|s\|_{E,v} &= \sum_{v \in \Sigma_{K'}} \sum_{w \in \Sigma_L, w|v} \frac{[L_w : K'_v][K'_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : K'][K' : \mathbb{Q}]} \log \|s\|_{E,v} \\ &= \sum_{w \in \Sigma_L} \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]} \log \|s\|_{E,w}.\end{aligned}$$

Cette propriété permet de définir la hauteur de tout élément non nul de $E \otimes_K \overline{K}$. La proposition suivante est une généralisation de l'inégalité d'Hadamard.

Proposition 1.1.12 (Proposition 4.13 de [**36**]). *Soit $(e_1, \ldots, e_{\dim E})$ une K-base de E. Si $\overline{E}$ est pur, on a l'inégalité*

$$h(\overline{E}) \leq \sum_{i=1}^{\dim E} h(e_i) + \log(\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E})) \dim E \leq \sum_{i=1}^{\dim E} h(e_i) + \frac{1}{2} \log(2 \dim E) \dim E.$$

1.1.5. Éléments de théorie des pentes adélique. Soit $\overline{E}$ un fibré adélique pur sur K de dimension supérieure ou égale à 1.

Définition 1.1.13. La pente d'Arakelov normalisée de $\overline{E}$ est

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\overline{E}) = \frac{\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E})}{\dim E}.$$

D'après la proposition 5.3 de [**36**], l'intersection de l'ensemble

$$\Upsilon(\overline{E}) = \{(\dim F, \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{F})) \mid \overline{F} \subset \overline{E}\}$$

avec $\{(x,y) \mid y \geq t\} \subset \mathbb{R}^2$ est finie pour tout nombre réel t. L'enveloppe convexe de $\Upsilon(\overline{E})$ est délimitée par une fonction concave et affine par morceaux $\mathcal{P}_{\overline{E}} \colon [0, \dim E] \to \mathbb{R}$. Pour tout entier $i \in \{1, \ldots, \dim E\}$, on définit la i-ème pente de $\overline{E}$, notée $\widehat{\mu}_i(\overline{E})$, en posant

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) = \mathcal{P}_{\overline{E}}(i) - \mathcal{P}_{\overline{E}}(i-1)$$

(voir [**36**, définition 5.9]). Nous allons rappeler les propriétés vérifiées par ces pentes dont nous aurons besoin, qui sont démontrées au paragraphe 5.2 de [**36**].

Proposition 1.1.14. *On a :*

(1) $\sum_{i=1}^{\dim E} \widehat{\mu}_i(\overline{E}) = \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{E})$;

(2) $\widehat{\mu}_{\dim E}(\overline{E}) \leq \cdots \leq \widehat{\mu}_1(\overline{E})$;

(3) $\widehat{\mu}_1(\overline{E}) = \max\{\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\overline{F}) \mid \overline{F} \subset \overline{E},\ F \neq \{0\}\}$;

(4) si $\overline{E}$ est hermitien, alors pour tout $i \in \{1, \dots, \dim E\}$,

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) = -\widehat{\mu}_{\dim E - i + 1}(\overline{E}^{\vee}),$$

et

$$\widehat{\mu}_i(\overline{E}) = \min_{E_2} \max_{E_1} \widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\overline{E_1/E_2}),$$

où E_1 et E_2 parcourent les sous-espaces vectoriels de E tels que $E_2 \subset E_1$, $\dim E_1 \geq i$, $\dim E_2 \leq i - 1$.

Dans la suite, nous noterons $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) = \widehat{\mu}_1(\overline{E}) = \max\{\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\overline{F}) \mid \overline{F} \subset \overline{E},\ F \neq \{0\}\}$. Cette quantité est appelée pente maximale de $\overline{E}$.

Exemple 1.1.15. Si E est muni d'une structure de fibré adélique triviale comme à l'exemple 1.1.3, alors toutes ses pentes successives $\widehat{\mu}_1(\overline{E}), \dots, \widehat{\mu}_{\dim E}(\overline{E})$ sont nulles.

Considérons le premier minimum logarithmique de $\overline{E}$ (au sens de Roy et Thunder [**73**]), défini par $\lambda_1(\overline{E}) = \min_{x \in V \setminus \{0\}} h(x)$. La proposition suivante est due à Gaudron [**36**], et relie cette quantité à la pente maximale de $\overline{E}$.

Proposition 1.1.16 (Corollaire du théorème 5.20 de [**36**]). *Si $\overline{E}$ est pur, on a l'encadrement :*

$$-\log \Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + \lambda_1(\overline{E}) \leq \frac{1}{2}\log(\dim E) + \eta + \log \Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}),$$

où η est une constante ne dépendant que de K.

Dans la suite du texte, nous serons amenés à comparer la pente maximale d'un fibré adélique hermitien avec celles de ses puissances symétriques, au moyen du résultat suivant.

Proposition 1.1.17 (Proposition 3.16 de [**38**]). *Si $\overline{E}$ est un fibré adélique hermitien, alors pour tout entier $\ell \geq 1$, on a l'inégalité*

$$\widehat{\mu}_{\max}(S^{\ell}\overline{E}) \leq \ell(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + 2\log(\dim E)).$$

On obtient le corollaire suivant dans le cas d'un fibré adélique pur.

Corollaire 1.1.18. *Supposons que $\overline{E}$ est pur. Pour tout entier $\ell \geq 1$, on a l'inégalité*

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\max}(S^{\ell}\overline{E}) &\leq \ell(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + 2\log(\dim E) + \log \Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E})) \\ &\leq \ell(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + 2\log(\dim E) + \max\{1, \log(\dim E)\}).\end{aligned}$$

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un fibré adélique hermitien $\overline{E}_{\varepsilon} = (E, (\|.\|_{\varepsilon,v})_{v \in \Sigma_K})$ tel que

$$\widehat{\mu}_{\max}(S^{\ell}\overline{E}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(S^{\ell}\overline{E}_{\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_{\varepsilon}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + \log(\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E})) + \log(1+\varepsilon)$$

(voir [**36**, page 86]). En appliquant la proposition 1.1.17, on en déduit que

$$\widehat{\mu}_{\max}(S^{\ell}\overline{E}) \leq \ell(\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + 2\log(\dim E) + \log(\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E})) + \log(1+\varepsilon)),$$

et on obtient la première inégalité en faisant tendre ε vers 0. La seconde découle quant à elle de la majoration $\log \Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}) \leq \frac{1}{2}\log(2\dim E) \leq \max\{1, \log(\dim E)\}$.

□

Nous aurons également besoin d'une estimation de la pente maximale d'un produit tensoriel de fibrés adéliques. Dans le cas d'un produit tensoriel avec un espace vectoriel de dimension 1, on a le résultat suivant.

Proposition 1.1.19 (Propriété 5.7 (1) de [**36**]). *Soit $\overline{F}$ un fibré adélique sur K tel que $\dim F = 1$. Supposons que $\overline{E}$ et $\overline{F}$ sont purs. Alors $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E} \otimes_K \overline{F}) = \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) + \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\overline{F})$.*

Nous disposons également d'un énoncé plus général, qui fait l'objet de la proposition suivante. Dans le cas hermitien, ce résultat est un théorème de Bost et Chen [**9**, théorème A], qui améliore une majoration similaire de Gaudron et Rémond [**40**].

Proposition 1.1.20. *Soit $\ell \geq 1$ un entier naturel et soient $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_\ell$ des fibrés adéliques purs sur K. On a les inégalités*

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\max}\left(\bigotimes_{i=1}^{\ell}\overline{E}_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{\ell}\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\ell}(\log(\dim E_i) + \log\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\ell}\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) + \frac{3}{2}\sum_{i=2}^{\ell}\max\{1, \log(\dim E_i)\}.\end{aligned}$$

Démonstration : Comme nous l'avons mentionné, ces majorations correspondent au théorème A de [**9**] dans le cas où tous les fibrés adéliques $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_\ell$ sont hermitiens. Le cas général se démontre de la même façon que pour le corollaire 1.1.18. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$, il existe un fibré adélique hermitien $\overline{E}_{i,\varepsilon} = (E_i, (\|.\|_{v,\varepsilon})_{v\in\Sigma_K})$ vérifiant $\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_{i,\varepsilon}) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) + \log(\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}_i)) + \log(1+\varepsilon)$ et tel que l'on ait

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(\bigotimes_{i=1}^{\ell}\overline{E}_i\right) \leq \widehat{\mu}_{\max}\left(\bigotimes_{i=1}^{\ell}\overline{E}_{i,\varepsilon}\right)$$

(l'existence de ces fibrés adéliques découle du lemme 4.3 de [**36**]). En appliquant la proposition aux fibrés adéliques hermitiens $\overline{E}_{1,\varepsilon}, \ldots, \overline{E}_{\ell,\varepsilon}$, on en déduit que

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(\bigotimes_{i=1}^{\ell}\overline{E}_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\ell}\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{\ell}(\log(\dim E_i) + \log\Delta_{\mathrm{n}}(\overline{E}_i) + \log(1+\varepsilon)),$$

et on conclut en faisant tendre ε vers 0 et en appliquant les majorations $\log\Delta_{\mathrm{n}}(E_i) \leq \max\{1, \log\dim E_i\}$, $2 \leq i \leq m$.

□

Nous terminons ce paragraphe avec une évaluation de la pente maximale de la somme directe de fibrés adéliques hermitiens.

Proposition 1.1.21 (Propriété 5.7 (2) de [**36**]). *Soit $\ell \geq 1$ un entier naturel et soient $\overline{E}_1, \ldots, \overline{E}_\ell$ des fibrés adéliques hermitiens sur K. On a*

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(\bigoplus_{i=1}^{\ell}\overline{E}_i\right) = \max_{1\leq i\leq\ell}\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_i).$$

1.1.6. Lemmes de Siegel. Un lemme de Siegel est un outil récurrent dans les démonstrations de transcendance. Il permet de construire un vecteur non nul s de petite « taille » dans un K-espace vectoriel E, de sorte que s soit solution d'un système d'équations linéaires, voire d'un système d'inéquations (on parle alors de lemme de Siegel *approché*). Dans le langage des fibrés adéliques, le mot « taille » désigne la hauteur de s. Quant E est l'espace des sections globales d'un fibré inversible (par exemple, un espace de polynômes), ce vecteur est couramment appelé *section auxiliaire*. De nombreuses versions sont apparues dans la littérature depuis l'énoncé originel de Siegel en 1929 (voir par exemple [**5, 37, 39**]). Dans leurs premières versions, les majorations de la hauteur de s faisaient intervenir le discriminant du corps de nombres K. Il est possible de s'affranchir de cette dépendance en construisant la section s dans l'espace $E \otimes_K \overline{\mathbb{Q}}$, comme l'ont montré Roy et Thunder [**72**] ; on parle alors de lemme de Siegel *absolu*. Pour un historique plus complet sur ces avancées, nous renvoyons à l'article de Gaudron [**38**, § 4], dont le « lemme de Siegel approché absolu » que nous présentons est issu.

Soit $\overline{E}$ et $\overline{F}$ deux fibrés vectoriels adéliques hermitiens sur K. Soit $v_0 \in \Sigma_K$ une place de K et soit $A_0 \colon E \otimes_K \mathbb{C}_{v_0} \to F \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ une application $\mathbb{C}_{v_0}$-linéaire. On considère la norme « tordue » $\|.\|_{E_0,v_0}$ sur $E \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ définie par :

$$\forall x \in E \otimes_K \mathbb{C}_{v_0},\ \|x\|_{E_0,v_0} := \begin{cases} \max\{\|x\|_{E,v_0}, \|A_0x\|_{F,v_0}\} & \text{si } v_0 \text{ est finie,} \\ (\|x\|_{E,v_0}^2 + \|A_0x\|_{F,v_0}^2)^{1/2} & \text{sinon.}\end{cases}$$

On construit alors un nouveau fibré adélique $\overline{E}_0 = (E, (\|.\|_{E_0,v})_{v\in\Sigma_K})$, en posant $\|.\|_{E_0,v} = \|.\|_{E,v}$ pour toute place $v \neq v_0$ de K. Nous pouvons alors énoncer une version simplifiée du « lemme de Siegel approché absolu » de [**38**, page 24].

Lemme 1.1.22. *En conservant les notations ci-dessus, il existe un vecteur non nul x de $E \otimes_K \overline{K}$ tel que*

$$h_{\overline{E}_0}(x) \leq \frac{\operatorname{rg} A_0}{\dim E}\frac{[K_{v_0} : \mathbb{Q}_{v_0}]}{[K : \mathbb{Q}]}\log_+(2\|A_0\|_{v_0}) + \frac{1}{2}\log(\dim E) - \widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\overline{E}).$$

Remarquons que l'énoncé ci-dessus reste valable si l'on supprime la condition du pureté dans la définition d'un fibré adélique hermitien (voir [**38**]). Il peut s'avérer utile d'imposer des contraintes sur le vecteur x que nous construisons. On parle alors d'un « lemme de Siegel avec contrainte », ou encore de « lemme de Siegel d'évitement ». L'exemple suivant est un cas particulier d'un théorème de Gaudron [**37**].

Théorème 1.1.23 (Corollaire du théorème 1.1 de [**37**]). *Soit K un corps de nombres de discriminant D_K. Soit $\overline{E}$ un fibré adélique pur de dimension $\ell \geq 1$ sur K, et soit E_1 un sous espace vectoriel de E de dimension $\ell_1 < \ell$. Posons*

$$H := ((41\ell)^{[K:\mathbb{Q}]}|D_K|)^{1/2}\exp\left(-[K:\mathbb{Q}]\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\overline{E})\right).$$

Il existe un vecteur $s \in E \setminus E_1$ tel que

$$\exp(h(s)) \leq H\max\left\{1, \left(\frac{H(2\dim E_1)^{[K:\mathbb{Q}]/2}}{\exp(-[K:\mathbb{Q}]\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\overline{E}_1))}\right)^{\frac{\ell_1}{\ell-\ell_1}}, \left(\frac{H}{\exp([K:\mathbb{Q}]\lambda_1(\overline{E}_1))}\right)^{\frac{\ell_1-1}{\ell-\ell_1+1}}\right\}.$$

Remarque 1.1.24. Dans la majorité des énoncés du paragraphe 1.1, nous avons imposé que les fibrés vectoriels adéliques étaient purs. Cependant, il est possible d'introduire la notion de défaut de pureté, qui joue un rôle similaire au défaut d'hermitianité, et qui permet d'adapter la plupart des résultats que nous avons présentés pour des fibrés adéliques impurs (voir [**37**, § 2.1.3]). Nous avons fait le choix de ne pas détailler ces constructions, car les fibrés vectoriels adéliques que nous manipulerons dans la suite seront systématiquement purs (et même hermitiens dans la partie 2).

1.1.7. Convention. Dans la suite du texte, un fibré adélique $\overline{E}$ sera désigné simplement par son espace vectoriel sous-jacent E afin de ne pas alourdir les notations.

1.2. Groupe de Picard et diviseurs de Cartier

Définition 1.2.1 (Définition 5.1.21 de [**54**]). Soit X un schéma. Nous dirons qu'un faisceau de O_X-modules $\mathscr{L}$ est un fibré inversible si pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage ouvert U de x et un isomorphisme de $\mathscr{O}_U$-modules $\mathscr{L}_{|U} \simeq \mathscr{O}_U$. Si X est noethérien, $\mathscr{L}$ est un fibré inversible si et seulement s'il est cohérent et si $\mathscr{L}_x$ est libre de rang 1 sur $\mathscr{O}_{X,x}$ pour tout $x \in X$.

Si $\mathscr{L}$ est un fibré inversible sur un schéma X, nous noterons

$$\mathscr{L}(x) = \{s(x) \mid s \in \mathscr{L}_x\}.$$

Si $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sont deux fibrés inversibles sur X, leur produit tensoriel $\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2$ est un fibré inversible. De plus, on a $\mathscr{L} \otimes \mathscr{O}_X = \mathscr{L}$ pour tout fibré inversible $\mathscr{L}$ sur X, et si $\mathscr{L}^{-1}$ désigne le faisceau de modules dual de $\mathscr{L}$ (défini par $\mathscr{L}^{-1}(U) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X(U)}(\mathscr{L}(U), \mathscr{O}_X(U))$ pour tout ouvert U de X), on a par ailleurs $\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1} \simeq \mathscr{O}_X$. On en déduit que l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés inversibles sur X est un groupe, que l'on note $\mathrm{Pic}(X)$. On pose également $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Définition 1.2.2. Soit S un schéma de base et soit $X \to S$ un schéma. Un fibré inversible $\mathscr{L}$ sur X est dit très ample s'il existe une immersion fermée dans un espace projectif $\iota\colon X \to \mathbb{P}^n_S$ telle que $\mathscr{L} \simeq \mathscr{O}_X(1) := \iota^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_S}(1)$. Nous dirons que $\mathscr{L}$ est ample s'il existe un entier naturel n tel que $\mathscr{L}^{\otimes n}$ soit ample. Un élément de $\mathrm{Pic}(X)$ est dit ample s'il est représenté par un fibré inversible ample.

La définition d'amplitude s'étend naturellement aux éléments de $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(X)$: un élément $\mathscr{L}$ de $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(X)$ est dit ample s'il existe un entier r tel que $\mathscr{L}^{\otimes r}$ soit ample.

Dans la suite de ce paragraphe, on fixe un schéma X.

Définition 1.2.3. Le faisceau des germes de sections méromorphes de X, noté $\mathcal{K}_X$, est défini comme étant le faisceau d'algèbres associé au pré-faisceau

$$U \mapsto S(U)^{-1}\mathscr{O}_X(U)$$

qui à un ouvert U de X associe la localisation de $\mathscr{O}_X(U)$ en l'ensemble $S(U)$ des éléments $f \in \mathscr{O}_X(U)$ dont le germe f_x est un élément régulier de $\mathscr{O}_{X,x}$ pour tout $x \in U$ (c'est à dire que f_x n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathscr{O}_{X,x}$). On note $\mathcal{K}_X^*$ le faisceau des éléments inversibles de $\mathcal{K}_X$.

Définition 1.2.4. On note $\mathrm{Div}(X)$ le groupe $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{K}_X^*/\mathscr{O}_X^*)$. Les éléments de $\mathrm{Div}(X)$ sont appelés les diviseurs de Cartier de X. Un diviseur de Cartier est dit principal si c'est l'image d'un élément de $\mathrm{H}^0(X, \mathcal{K}_X^*)$ dans $\mathrm{Div}(X)$. Si $f \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{K}_X^*)$, on note $\mathrm{div}(f) \in \mathrm{Div}(X)$ le diviseur de Cartier principal associé. Deux éléments D_1, D_2 de $\mathrm{Div}(X)$ sont dits linéairement équivalents si $D_1 - D_2$ est principal. On note $\mathrm{CaCl}(X)$ le groupe des classes d'éléments de $\mathrm{Div}(X)$ modulo la relation d'équivalence linéaire.

Remarque 1.2.5. Par définition, on peut associer à un diviseur de Cartier $D \in \mathrm{Div}(X)$ une famille $(U_i, f_i)_{i\in I}$ vérifiant :

(1) pour tout $i \in I$, U_i est un ouvert de Zariski de X et $f_i = a_i/b_i$ est le quotient de fonctions régulières $a_i, b_i \in \mathscr{O}_X(U_i)$, avec $b_{i,x} \in \mathscr{O}_{X,x}$ régulier pour tout $x \in U_i$.

(2) $X = \bigcup_{i\in I} U_i$;

(3) pour tous $i, j \in I$, $f_{i|U_i\cap U_j} \in f_{j|U_i\cap U_j}\mathscr{O}_X(U_i \cap U_j)$.

Un diviseur de Cartier $D \in \mathrm{Div}(X)$ est dit effectif s'il appartient à l'image de l'application canonique

$$\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X \cap \mathcal{K}_X^*) \to \mathrm{H}^0(X, \mathcal{K}_X^*/\mathscr{O}_X^*).$$

En particulier, un diviseur est effectif s'il peut être représenté par une famille $(U_i, f_i)_{i\in I}$ telle que pour tout $i \in I$, on ait avec $f_i \in \mathscr{O}_X(U_i)$ (autrement dit, la fonction f_i n'a pas de pôle sur U_i). Un diviseur de Cartier D est dit nef si pour toute courbe algébrique irréductible C dans X, l'intersection $(D \cdot C)$ de D avec C vérifie $(D \cdot C) \geq 0$ (voir [**52**, § 1.1.C]). Ces définitions ne dépendent que de la classe d'équivalence linéaire de D, et s'étendent donc aux éléments de $\mathrm{CaCl}(X)$.

Le résultat suivant est bien connu et permet d'identifier les classes d'équivalences des diviseurs de Cartier et des fibrés inversibles sur X.

Proposition 1.2.6 (Proposition 7.1.32 de [**54**]). *Supposons que X est une variété quasi-projective sur un schéma noethérien. On a un isomorphisme de groupes*

$$\rho\colon \mathrm{CaCl}(X) \to \mathrm{Pic}(X).$$

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que l'hypothèse de la proposition est vérifiée. Étant donné un diviseur de Cartier D sur X, on notera $\mathscr{O}_X(D) = \rho([D]) \in \mathrm{Pic}(X)$ l'image de sa classe d'équivalence par l'isomorphisme ρ. Un fibré inversible est dit dit effectif (respectivement nef) si l'image réciproque de sa classe d'isomorphisme dans $\mathrm{Pic}(X)$ par ρ est effectif (respectivement nef). On vérifie immédiatement que si $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ est effectif, alors $\mathscr{L}^{\otimes r}$ est effectif pour tout $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Nous dirons qu'un élément $\mathscr{L}$ de $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(X)$ est effectif s'il existe un nombre entier $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\mathscr{L}^{\otimes r}$ soit un élément effectif de $\mathrm{Pic}(X)$. L'ensemble des classes de fibrés inversibles effectifs de $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(X)$ forme un cône, appelé le cône effectif de $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(X)$. Enfin, on peut vérifier que si $\mathscr{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ est effectif, alors $\mathscr{L}$ possède une section globale non nulle, i.e. $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{L}) \neq \{0\}$.

1.3. Métrique sur un fibré inversible

On considère une variété projective X définie sur K. Pour toute place v de K, on note X_v^{an} l'espace analytique associé au $\mathbb{C}_v$-schéma $X_{\mathbb{C}_v}$ (au sens de Berkovich si v est une place finie). Sans entrer dans les détails, mentionnons que X_v^{an} est un espace topologique compact contenant $X(\mathbb{C}_v)$. La topologie induite sur $X(\mathbb{C}_v)$ est plus fine que la topologie de Zariski, et l'on dispose d'un morphisme d'espaces localement annelés $j_v\colon X_v^{\mathrm{an}} \to X$ dont la restriction de j_v à $X(\mathbb{C}_v)$ envoie chaque élément de $X(\mathbb{C}_v)$ sur son point correspondant dans X. Pour tout point x de X, on note $\mathscr{O}_{X,x}$ l'anneau local défini par x. Si $\mathscr{L}$ est un fibré inversible sur X, on note $\mathscr{L}_x$ le $\mathscr{O}_{X,x}$-module des germes de $\mathscr{L}$ en x.

1.3.1. Premières définitions.

Définition 1.3.1. Soit $\mathscr{L}$ un fibré inversible sur X. Une métrique sur $\mathscr{L}$ est la donnée, pour chaque place v de K, d'une application qui associe à chaque point x de $X(\mathbb{C}_v)$ une fonction $\|.\|_v(x)\colon \mathscr{L}_x \otimes_{\mathscr{O}_{X,x}} \mathbb{C}_v \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout ouvert U de X et toute section $s \in \mathrm{H}^0(U, \mathscr{L}) \otimes_K \mathbb{C}_v$,

(1) l'application $\|s\|_v\colon x \mapsto \|s\|_v(x)$ s'étend en une fonction continue sur U_v^{an} (pour la topologie induite par celle de X_v^{an}),
(2) pour toute fonction continue $f \in \mathscr{O}_X(U) \otimes \mathbb{C}_v$ et tout $x \in U(\mathbb{C}_v)$,
$$\|fs\|_v(x) = |f(x)|_v \|s\|_v(x),$$
(3) si $x \in U(\mathbb{C}_v)$ est tel que $s(x) \neq 0$, alors $\|s\|_v(x) \neq 0$.

Remarque 1.3.2. La condition de continuité 1 nous permettra de définir la norme sup d'une section de $\mathscr{L}$. Les conditions 2 et 3 impliquent que pour tout point x de $X(\mathbb{C}_v)$, une métrique sur $\mathscr{L}$ définit une norme $\|.\|_v(x)$ sur $\mathscr{L}_x \otimes \mathbb{C}_v$ pour chaque place v de K (cette norme est ultramétrique si la place est finie).

On appelle modèle de $(X, \mathscr{L})$ un $\mathscr{O}_K$-schéma projectif et plat $\mathfrak{X}$ muni d'un fibré inversible $\mathfrak{L}$ tel que $X \cong \mathfrak{X} \times_{\mathscr{O}_K} \mathrm{Spec}(K)$ et $\mathscr{L} \cong \mathfrak{L} \otimes_{\mathscr{O}_K} K$. Soit v une place finie de K ; on note $\widehat{\mathscr{O}}_v$ l'anneau de valuation de $\mathbb{C}_v$. Soit $x \in X(\mathbb{C}_v)$ et $\widehat{x} \in \mathfrak{X}(\widehat{\mathscr{O}}_v)$ un point prolongeant x : $x = \widehat{x}_{|\,\mathrm{Spec}\,K}$. Si $s \in \mathscr{L}_x \otimes \mathbb{C}_v$, on pose
$$\|s\|_{\mathfrak{L},v}(x) = \inf\{|t|_v \mid t \in \mathbb{C}_v^\times,\ t^{-1}s \in \widehat{x}^*\mathfrak{L}\}.$$
Cette définition définit une application $\|.\|_{\mathfrak{L},v}$ qui satisfait aux conditions de la définition 1.3.1.

Définition 1.3.3. Soit $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K})$ la donnée d'un fibré inversible $\mathscr{L}$ sur X muni d'une métrique $(\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K}$. On dit que $\overline{\mathscr{L}}$ est un fibré inversible adélique si la métrique satisfait aux conditions suivantes :

(1) pour toute place $v \in \Sigma_K$, $\|.\|_v$ est invariante par l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}_v/K_v)$;
(2) il existe un modèle $(\mathfrak{X}, \mathfrak{L})$ de $(X, \mathscr{L})$ tel que $\|.\|_v = \|.\|_{\mathfrak{L},v}$ pour toute place $v \in \Sigma_{K,f}$ en dehors d'un nombre fini.

Une telle métrique est appelée métrique adélique. Dans la suite, on notera $\|s(x)\|_v$ plutôt que $\|s\|_v(x)$.

Exemple 1.3.4. Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible très ample sur X et soit $(s_1, \ldots, s_\ell)$ une base de $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{L})$. Pour toute place v de K, tout $x \in X(\mathbb{C}_v)$ et toute section $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{L}) \setminus \{0\}$ ne s'annulant pas en x, on pose
$$\|s(x)\|_v = \left(\max_{0\leq i\leq \ell} \left|\frac{s_i(x)}{s(x)}\right|_v\right)^{-1}.$$
La métrique $(\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K}$ ainsi définie est adélique.

1.3.2. Opérations sur les fibrés inversibles et métriques.

Produit tensoriel. Si $(\mathscr{L}_1, (\|.\|_{1,v})_{v\in\Sigma_K})$ et $(\mathscr{L}_2, (\|.\|_{2,v})_{v\in\Sigma_K})$ sont deux fibrés inversibles munis de métriques sur X, il est possible de définir une métrique produit sur $\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2$ de la façon suivante. Pour toute place $v \in \Sigma_K$, pour tout $x \in X(\mathbb{C}_v)$ et toutes sections s_1 de $\mathscr{L}_1 \otimes \mathbb{C}_v$ et s_2 de $\mathscr{L}_2 \otimes \mathbb{C}_v$ définies au voisinage de x, on pose

$$\|s_1 \otimes s_2(x)\|_v = \|s_1(x)\|_v \|s_2(x)\|_v.$$

Si de plus $\overline{\mathscr{L}}_1 = (\|.\|_{1,v})_{v\in\Sigma_K}$ et $\overline{\mathscr{L}}_2 = (\|.\|_{2,v})_{v\in\Sigma_K}$ sont adéliques, alors $(\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K}$ est une métrique adélique, et on note $\overline{\mathscr{L}}_1 \otimes \overline{\mathscr{L}}_1$ le fibré inversible ainsi défini.

Métrique tirée en arrière. Par ailleurs, si $\phi\colon Y \to X$ est un morphisme de variétés projectives sur $\operatorname{Spec}(K)$ et si $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K})$ est un fibré inversible adélique sur X, on munit le fibré inversible $\phi^*\mathscr{L}$ sur Y d'une métrique adélique de la façon suivante. Soit v une place de K. Pour tout point $y \in Y(\mathbb{C}_v)$ et pour toute section $s_Y = \phi^* s$ ne s'annulant pas en y, on pose $\|s_Y(y)\|_v = \|s(\phi(y))\|_v$.

Fibré inversible dual. Soit $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K})$ est un fibré inversible adélique sur X. Considérons le fibré inversible dual $\mathscr{L}^{-1}$ de $\mathscr{L}$ (défini au paragraphe 1.2). On définit une métrique sur $\mathscr{L}^{-1}$ de la façon suivante. Soit v une place de K et soit $x \in X(\mathbb{C}_v)$. Considérons un voisinage ouvert U de x dans X et une section $\nu \in \mathrm{H}^0(U, \mathscr{L}^{-1}_{|U})$. La section ν est une application $\nu\colon \mathrm{H}^0(U, \mathscr{L}_{|U}) \to \mathscr{O}_X(U)$ vérifiant $\nu(f \cdot s) = f\nu(s)$ pour toute section $s \in \mathrm{H}^0(U, \mathscr{L}_{|U})$ et toute fonction $f \in \mathscr{O}_X(U)$. Supposons que le germe de ν ne s'annule pas en x. Il existe une section $s \in \mathrm{H}^0(U, \mathscr{L}_{|U})$ telle que $s(x) \neq 0$ et $(\nu(s))(x) \neq 0$. On pose alors

$$\|\nu(x)\|_v = \frac{|(\nu(s))(x)|_v}{\|s(x)\|_v}.$$

Cette définition ne dépend pas du choix de la section s, et on munit ainsi $\mathscr{L}^{-1}$ d'une métrique adélique. On note $\overline{\mathscr{L}}^{-1}$ le fibré adélique associé.

1.3.3. Hauteur associée à un fibré inversible adélique. Soit $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K})$ un fibré inversible adélique sur X. Soit v_0 une place de K et soit L une extension finie de K. Pour toute place v de L au dessus de v_0, on note $\sigma_v\colon L \hookrightarrow \mathbb{C}_{v_0}$ le plongement associé à $|.|_v$.

Définition 1.3.5. Soit L une extension de K et x un point de $X(L)$. Considérons une section locale s de $\mathscr{L}$ telle que $s(x) \neq 0$. On définit la hauteur (absolue) de x relativement à $\mathscr{L}$ comme

$$h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) = -\sum_{v\in\Sigma_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log \|s(\sigma_v(x))\|_v.$$

Cette définition ne dépend pas de la section s choisie (par la formule du produit) ni du corps L. En effet, si L' est une extension finie de L, alors

$$\begin{aligned}
h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) &= -\sum_{v\in\Sigma_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log \|s(\sigma_v(x))\|_v \\
&= -\sum_{v\in\Sigma_L} \sum_{w\in\Sigma_{L'}, w|v} \frac{[L'_w : L_v][L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L' : L][L : \mathbb{Q}]} \log \|s(\sigma_w(x))\|_v \\
&= -\sum_{w\in\Sigma_{L'}} \frac{[L'_w : \mathbb{Q}_w]}{[L' : \mathbb{Q}]} \log \|s(\sigma_w(x))\|_w.
\end{aligned}$$

On peut ainsi définir la hauteur de tout point $x \in X(\overline{K})$. Par la formule du produit, on a $h_{\overline{\mathscr{L}}^{-1}}(x) = -h_{\overline{\mathscr{L}}}(x)$. De plus, si $\phi\colon Y \to X$ est un morphisme de variétés projectives sur $\operatorname{Spec}(K)$, on a $h_{\overline{\varphi^*\mathscr{L}}}(x) = h_{\overline{\mathscr{L}}}(\varphi(x)$ pour tout $x \in X(\overline{K})$. Par ailleurs, si $\overline{\mathscr{L}}_1$ et $\overline{\mathscr{L}}_1$ sont deux fibrés inversibles adéliques, on a $h_{\overline{\mathscr{L}}_1 \otimes \overline{\mathscr{L}}_2}(x) = h_{\overline{\mathscr{L}}_1}(x) + h_{\overline{\mathscr{L}}_2}(x)$ pour tout point $x \in X(\overline{K})$.

Exemple 1.3.6. Soit $(s_0, \ldots, s_n)$ une base de $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_K, \mathscr{O}(1))$ correspondant à un choix de coordonnées homogènes. On munit le fibré $\mathscr{O}(1)$ de la métrique de l'exemple 1.3.4 associée à cette base : pour toute place v de K, tout $x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_v)$ et toute section $s \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_K, \mathscr{O}(1)) \setminus \{0\}$ ne s'annulant pas en x,

$$\|s(x)\|_v = \left(\max_{0 \leq i \leq n} \left| \frac{s_i(x)}{s(x)} \right|_v \right)^{-1}.$$

Alors pour toute extension finie L de K et pour tout point $x = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(L)$,

$$h_{\overline{\mathscr{O}(1)}}(x) = \sum_{v \in \Sigma_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log \max\{|x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}$$

est la hauteur de Weil de x.

Exemple 1.3.7. Soit $\mathscr{L}$ un fibré inversible sur X. Il existe deux fibrés inversibles très amples $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ sur X tels que $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2^{-1}$ (voir par exemple [**54**, lemme 7.1.31]). On peut munir ces deux fibrés inversibles des métriques adéliques de l'exemple 1.3.4. On obtient ainsi une métrique adélique sur $\mathscr{L}$ par produit tensoriel et dualité. On a alors

$$h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) = h_{\overline{\mathscr{L}}_1}(x) - h_{\overline{\mathscr{L}}_2}(x)$$

pour tout $x \in X(\overline{K})$.

Nous terminons ce paragraphe en rappelant le célèbre théorème de Northcott. L'énoncé suivant considère le cadre général des fibrés inversibles adéliques, pour lequel on pourra consulter le livre de Moriwaki [**59**].

Théorème 1.3.8. *Soit $\overline{\mathscr{L}}$ un fibré inversible adélique sur X. Si $\mathscr{L}$ est ample, alors pour tous nombres réels positifs ou nuls M, D, l'ensemble*

$$\{x \in X(\overline{K}) \mid h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) \leq M,\ [K(x) : K] \leq D\}$$

est fini.

Démonstration : Si le schéma X est intègre (c'est à dire si X est irréductible et réduit), l'énoncé correspond au théorème 9.11 de [**59**]. Si Z est une composante irréductible de X, il existe un sous-schéma fermé réduit Z_{red} de Z dont l'espace topologique associé est égal à Z (voir [**54**, proposition 2.4.2]). On en déduit que l'ensemble

$$\{x \in Z(\overline{K}) \mid h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) \leq M,\ [K(x) : K] \leq D\} = \{x \in Z_{\mathrm{red}}(\overline{K}) \mid h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) \leq M,\ [K(x) : K] \leq D\}$$

est fini. On en déduit le théorème 1.3.8 remarquant que

$$\{x \in X(\overline{K}) \mid h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) \leq M,\ [K(x) : K] \leq D\} = \bigcup_{i=1}^{\ell} \{x \in Z_i(\overline{K}) \mid h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) \leq M,\ [K(x) : K] \leq D\},$$

où $Z_1, \ldots, Z_\ell$ désignent les composantes irréductibles de X (qui sont en nombre fini). □

Dans la suite, si $\overline{\mathscr{L}}$ est un fibré inversible adélique, nous noterons $h_{\mathscr{L}}$ au lieu de $h_{\overline{\mathscr{L}}}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le choix de la structure adélique.

1.3.4. Hauteur des sections globales d'un fibré inversible adélique. Notons $V = \mathrm{H}^0(X, \mathscr{L})$ l'espace vectoriel des sections globales de $\mathscr{L}$. La structure de fibré inversible adélique de $\mathscr{L}$ induit une structure d'espace vectoriel normé sur $V \otimes_K \mathbb{C}_v$ pour toute place $v \in \Sigma_K$ en définissant la norme

$$\|s\|_{v,\sup} = \sup_{x \in X(\mathbb{C}_v)} \|s(x)\|_v.$$

On munit ainsi l'espace vectoriel V d'une structure de fibré vectoriel adélique. Cette quantité est finie étant donné que $X(\mathbb{C}_v)$ est contenu dans le compact X^{an} et que $\|s\|\colon x \mapsto \|s(x)\|_v$ est continue. On définit la hauteur d'une section par rapport à cette norme :

$$h_{\mathscr{L}}(s) = \sum_{v \in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|s\|_{v,\sup},$$

que nous noterons plus simplement $h(s)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

REMARQUE 1.3.9. Supposons que $\mathscr{L}$ soit très ample et que la métrique sur $\mathscr{L}$ soit celle de l'exemple 1.3.4 : il existe une base $(s_1, \dots, s_{\dim V})$ de V telle que pour toute place v de K, tout $x \in X(\mathbb{C}_v)$ et toute section $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{L}) \setminus \{0\}$ ne s'annulant pas en x, on ait

$$\|s(x)\|_v = \left(\max_{0 \le i \le \dim V} \left|\frac{s_i(x)}{s(x)}\right|_v\right)^{-1} = \min\left\{\left|\frac{s(x)}{s_i(x)}\right|_v \mid 1 \le i \le \dim V,\ s_i(x) \neq 0\right\}.$$

Soit $s = \sum_{i=1}^{\dim V} a_i s_i \in V$ et soit $v \in \Sigma_K$ une place ultramétrique. Considérons un point $x \in X(\mathbb{C}_v)$ et un entier $i \in \{1, \dots, \dim V\}$ tel que $s_i(x) \neq 0$. On a ainsi

$$\left|\frac{s(x)}{s_i(x)}\right|_v \le \max_{1 \le j \le \dim V} |a_j|_v \left|\frac{s_j(x)}{s_i(x)}\right|_v,$$

et on en déduit que

$$\|s(x)\|_v \le \min_{s_i(x) \neq 0} \max_{1 \le j \le \dim V} |a_j|_v \left|\frac{s_j(x)}{s_i(x)}\right|_v \le \max_{s_j(x) \neq 0} |a_j|_v \left|\frac{s_j(x)}{s_j(x)}\right|_v \le \max_{1 \le j \le \dim V} |a_j|_v.$$

Soit $i_0 \in \{1, \dots, \dim V\}$ tel que $|a_{i_0}|_v = \max_{1 \le j \le \dim V} |a_j|_v$. Soit $x \in X(\mathbb{C}_v)$ un point tel que $s_j(x) = 0$ pour tout $j \neq i_0$. On a alors $\|s(x)\|_v \ge |a_{i_0}|_v = \max_{1 \le j \le \dim V} |a_j|_v$. On en déduit que

$$\|s\|_{v,\sup} = \max_{1 \le i \le \dim V} |a_i|_v.$$

En particulier, le fibré vectoriel adélique $\overline{V} = (V, (\|.\|_{v,\sup})_{v \in \Sigma_K})$ est pur.

1.4. Hauteur et degré des variétés

Dans ce paragraphe, nous rappelons brièvement la notion de degré d'un schéma et de hauteur d'une variété projective.

Soit K un corps et soit $\pi \colon X \to \operatorname{Spec} K$ un morphisme propre de schémas. Considérons un fibré inversible $\mathscr{L}$ sur X. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{CH}^p(X)$ le p-ième groupe de Chow de X. On désigne par $c_1(\mathscr{L}) \in \mathrm{CH}^1(X)$ la première classe de Chern de X. Pour tout sous-schéma fermé Y de pure dimension $r \in \mathbb{N}$ de X, on définit le degré (géométrique) de Y relativement à $\mathscr{L}$ comme la quantité $\deg_{\mathscr{L}}(Y) = (c_1(\mathscr{L})^r \cdot Y) \in \mathbb{Z}$, où $(c_1(\mathscr{L})^r \cdot Y)$ désigne l'intersection

$$(c_1(\mathscr{L}) \cdot \ldots \cdot c_1(\mathscr{L}) \cdot Y)$$

de r copies de $c_1(\mathscr{L})$ avec Y (voir [**52**, § 1.1.C]). Si $X = \mathbb{P} = \mathbb{P}_K^{n_1} \times_K \cdots \times_K \mathbb{P}_K^{n_\ell}$ est un produit d'espaces projectifs, on notera plus simplement $\deg(Y) = \deg_{\mathscr{L}}(Y)$ le degré d'une sous-variété fermée Y relativement au faisceau inversible $\mathscr{L} = \mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1, \dots, 1)$ de $\mathbb{P}$. Par ailleurs, si Y est une sous-variété quasi-projective irréductible de $\mathbb{P}$, on désignera par $\deg(Y) = \deg(\overline{Y})$ le degré de l'adhérence de Zariski de Y dans $\mathbb{P}$.

Passons maintenant à la définition de la hauteur d'une variété projective. Nous suivrons l'approche de Bost, Gillet, Soulé [**10**]. Celle-ci repose sur les travaux de Gillet et Soulé, qui ont développé une théorie de l'intersection arithmétique dans leurs articles [**41, 42, 43**]. Dans la suite, nous n'aurons pas besoin de la définition précise de cette hauteur, que nous nous contentons de rappeler rapidement afin d'en fixer une normalisation. Supposons maintenant que $\iota \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}_K^n$ est une variété projective régulière et que $\overline{\mathscr{L}}$ est un fibré inversible adélique sur X, associé à un modèle $(\mathfrak{X}, \mathfrak{L})$ de $(X, \mathscr{L})$. On note $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathfrak{X})$ le groupe de Chow arithmétique de $\mathfrak{X}$ et $\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}}) = \widehat{c}_1(\mathfrak{L}) \in \widehat{\mathrm{CH}}^1(\mathfrak{X})$ la première classe de Chern arithmétique de $\mathfrak{L}$, définis comme dans [**10**, § 2]. Si Y est un sous-schéma fermé de pure dimension $r \in \mathbb{N}$ de X, la proposition 2.3.1 de [**10**] permet de définir un élément $(\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}})^r \cdot Y)$ de $\widehat{\mathrm{CH}}^1(\operatorname{Spec} \mathscr{O}_K)_{\mathbb{Q}} := \widehat{\mathrm{CH}}^1(\operatorname{Spec} \mathscr{O}_K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Dans [**10**, § 2.3.4], les auteurs définissent une fonction $\widehat{\deg} \colon \widehat{\mathrm{CH}}^1(\operatorname{Spec} \mathscr{O}_K)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{R}$. On définit alors le degré arithmétique de Y relativement à $\overline{\mathscr{L}}$ comme la quantité

$$\widehat{\deg}_{\overline{\mathscr{L}}}(Y) = \widehat{\deg}(\widehat{c}_1(\overline{\mathscr{L}})^r \cdot Y) \in \mathbb{R}.$$

La hauteur (normalisée) de Y relativement à $\overline{\mathscr{L}}$ est quant à elle définie par

$$h_{\overline{\mathscr{L}}}(Y) = \frac{\widehat{\deg}_{\overline{\mathscr{L}}}(Y)}{\deg_{\mathscr{L}}(Y)}.$$

Avec cette normalisation (qui diffère légèrement de celle choisie par Bost, Gillet et Soulé dans [**10**, § 3] et de celle définie par Zhang dans [**86**]), on a

$$h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) = h_{\overline{\mathscr{L}}}(\{x\})$$

pour tout point fermé $x \in X(\overline{K})$. La définition de la hauteur d'une sous-variété de X s'étend au cas où X n'est pas forcément régulière, comme cela est expliqué à la page 946 de [**10**].

Dans la suite, si $\mathscr{L} = \iota^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_K}(1)$ et si la métrique sur $\mathscr{L}$ est celle de l'exemple 1.3.4 (page 36), on écrira plus simplement $h(Y) = h_{\overline{\mathscr{L}}}(Y)$.

1.5. Minimums successifs sur une variété projective

Dans ce paragraphe, nous introduisons la notion de minimums successifs sur une variété projective définie sur un corps de nombres, en suivant Zhang [**85**, §5]. Nous comparons également ces quantités avec le premier et le dernier minimum (au sens de Roy et Thunder [**73**]) du fibré vectoriel adélique des sections globales d'un fibré inversible. À notre connaissance, ces comparaisons (proposition 1.5.4 et lemme 1.5.7) ne figurent pas dans la littérature à l'heure actuelle. Soit X une variété projective de dimension d définie sur un corps de nombres K. On considère un fibré inversible $\mathscr{L}$ sur X, et l'on suppose donnée une métrique adélique $(\|.\|_w)_{w\in\Sigma_K}$ sur $\mathscr{L}$.

1.5.1. Minimum absolu et dernier minimum.

Définition 1.5.1. On définit le dernier minimum de $\overline{\mathscr{L}}$ comme la quantité

$$\lambda_{\max}(\overline{\mathscr{L}}) = \min\{\max_{i\in I} h_{\mathscr{L}}(s_i) \mid (s_i)_{i\in I} \text{ est une base de } \mathrm{H}^0(X,\mathscr{L})\}.$$

Si l'on munit l'espace vectoriel $V := \mathrm{H}^0(X, \mathscr{L})$ d'une structure de fibré vectoriel adélique en considérant la norme $\|.\|_{v,\sup}$ sur $V \otimes_K \mathbb{C}_v$ (définie à la page 38) pour toute place v de K, alors la quantité $\lambda_{\max}(\overline{\mathscr{L}})$ est le logarithme du dernier minimum de V au sens de Roy et Thunder [**73**].

On note $\mathbf{B}(\mathscr{L})$ le lieu de base stable de $\mathscr{L}$, c'est-à-dire l'intersection des lieux de base $\mathscr{B}(m\mathscr{L})$ des fibrés $m\mathscr{L}$ pour $m \in \mathbb{N}$ (cette définition s'étend naturellement aux éléments de $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathrm{Pic}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, voir la remarque 2.1.24 de [**52**]). D'après la proposition 2.1.21 de [**52**], il existe un entier m_0 tel que pour tout entier m multiple de m_0, $\mathbf{B}(\mathscr{L}) = \mathscr{B}(m\mathscr{L})$. Soit $z \in (X \setminus \mathbf{B}(\mathscr{L}))(\overline{\mathbb{Q}})$ et soit $(s_i)_{i\in I}$ une base de $\mathrm{H}^0(X, m_0\mathscr{L})$. Comme $z \notin \mathscr{B}(m_0\mathscr{L})$, il existe $i \in I$ tel que $s_i(z) \neq 0$. On en déduit que

$$\begin{aligned} h_{\overline{\mathscr{L}}}(z) = \frac{1}{m_0} h_{\overline{m_0\mathscr{L}}}(z) &= -\frac{1}{m_0} \sum_{v\in\Sigma_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|s_i(z)\|_v \\ &\geq -\frac{1}{m_0} h_{m_0\mathscr{L}}(s_i) \geq -\frac{1}{m_0} \max_{i\in I} h_{m_0\mathscr{L}}(s_i). \end{aligned}$$

Ce raisonnement est valable pour toute base de $\mathrm{H}^0(X, m_0\mathscr{L})$ et tout $z \in (X \setminus \mathbf{B}(\mathscr{L}))(\overline{\mathbb{Q}})$. On en déduit que la quantité

$$\inf\{h_{\overline{\mathscr{L}}}(z) \mid z \in (X \setminus \mathbf{B}(\mathscr{L}))(\overline{\mathbb{Q}})\}$$

est finie. Si le fibré $\mathscr{L}$ est semi-ample (c'est-à-dire qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq m_0$, le fibré $m\mathscr{L}$ est engendré par ses sections globales), alors $\mathbf{B}(\mathscr{L}) = \emptyset$. Cette observation justifie la définition suivante.

Définition 1.5.2. Si $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K})$ est un fibré inversible adélique sur X avec $\mathscr{L}$ semi-ample, on définit le minimum absolu de $\overline{\mathscr{L}}$ comme le nombre réel

$$\mathrm{e}(\overline{\mathscr{L}}) = \inf_{z\in X(\overline{\mathbb{Q}})} h_{\overline{\mathscr{L}}}(z).$$

D'après les remarques précédentes, on a le lemme suivant.

LEMME 1.5.3. *Soit* $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K})$ *un fibré inversible adélique sur* X*. Alors pour tout* $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *tel que* $\mathbf{B}(\mathscr{L}) = \mathscr{B}(m\mathscr{L})$*, on a*

$$\inf\{h_{\overline{\mathscr{L}}}(z) \mid z \in (X \setminus \mathbf{B}(\mathscr{L}))(\overline{\mathbb{Q}})\} \geq -\frac{1}{m}\lambda_{\max}(\overline{m\mathscr{L}}).$$

En particulier, si $\mathscr{L}$ *est semi-ample alors pour tout* $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ *tel que* $m\mathscr{L}$ *est engendré par ses sections globales, l'inégalité*

$$\mathrm{e}(\overline{\mathscr{L}}) \geq -\frac{1}{m}\lambda_{\max}(\overline{m\mathscr{L}})$$

est vérifiée.

La proposition suivante est une conséquence d'un résultat classique de Zhang [**85**] et permet de comparer le comportement asymptotique du dernier minimum et le minimum absolu d'un fibré ample équipé d'une métrique semi-positive (au sens de [**59**, § 1.12] et [**85**, § 1, (1.1)]).

PROPOSITION 1.5.4. *Soit* $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K})$ *un fibré inversible adélique sur* X*. On suppose que la métrique sur* $\mathscr{L}$ *est semi-positive et que* $\mathscr{L}$ *est ample. Alors*

$$-\mathrm{e}(\overline{\mathscr{L}}) = \lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\lambda_{\max}(\overline{m\mathscr{L}}).$$

Démonstration : D'après le lemme 1.5.3, si $m \in \mathbb{N}$ est suffisamment grand on a l'inégalité

$$\mathrm{e}(\overline{\mathscr{L}}) \geq -\frac{1}{m}\lambda_{\max}(\overline{m\mathscr{L}}).$$

On en déduit que

$$\liminf_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\lambda_{\max}(\overline{m\mathscr{L}}) \geq -\mathrm{e}(\overline{\mathscr{L}}).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha = -\mathrm{e}(\overline{\mathscr{L}}) + \varepsilon$. On définit une nouvelle structure de fibré adélique $\overline{\mathscr{L}(\alpha)} = (\mathscr{L}, (\|.\|_{\alpha,v})_{v\in\Sigma_K})$ sur $\mathscr{L}$ en posant $\|.\|_{\alpha,v} = e^{-\alpha}\|.\|_v$ si v est archimédienne et $\|.\|_{\alpha,v} = \|.\|_v$ sinon. Pour tout $z \in X(\overline{\mathbb{Q}})$, on a ainsi

$$h_{\overline{\mathscr{L}(-\alpha)}}(z) = h_{\overline{\mathscr{L}}}(z) + \alpha \geq \varepsilon > 0.$$

D'après le théorème 0.2 de [**61**], l'hypothèse du corollaire 5.7 (2) de [**85**] est satisfaite et on obtient : si $m \in \mathbb{N}$ est suffisamment grand il existe une base $(s_i)_{i\in I}$ de $\mathrm{H}^0(X, m\mathscr{L})$ telle que pour tout $i \in I$,

$$h_{m\mathscr{L}(\alpha)}(s_i) = h_{m\mathscr{L}}(s_i) - m\alpha < 0.$$

On en déduit que

$$\limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\lambda_{\max}(\overline{m\mathscr{L}}) \leq \alpha = -\mathrm{e}(\overline{\mathscr{L}}) + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, on en déduit que

$$\liminf_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\lambda_{\max}(\overline{m\mathscr{L}}) = \limsup_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\lambda_{\max}(\overline{m\mathscr{L}}) = -\mathrm{e}(\overline{\mathscr{L}}),$$

ce qui démontre la proposition.

□

1.5.2. Autres minimums.

DÉFINITION 1.5.5. Supposons que le fibré $\mathscr{L}$ est semi-ample. Si U est un ouvert de Zariski de X, on désigne par $e_{\mathscr{L}}(U)$ la quantité $\inf_{x\in U(\overline{K})} h_{\mathscr{L}}(x)$. Pour tout nombre entier i compris entre 1 et d, on définit le i-ème minimum successif de X relativement à $\overline{\mathscr{L}}$, noté $e_i(\mathscr{L})$, par

$$e_i(\overline{\mathscr{L}}) = \liminf\{e_{\mathscr{L}}(X \setminus Z) \mid Z \text{ est un fermé de } X \text{ et } \operatorname{codim}_X Z = i\}.$$

On a clairement les inégalités $e_1(\overline{\mathscr{L}}) \geq e_2(\overline{\mathscr{L}}) \geq \cdots \geq e_d(\overline{\mathscr{L}})$. Par ailleurs, $e_d(\overline{\mathscr{L}}) = e(\overline{\mathscr{L}})$. Dans le cas où la métrique sur $\mathscr{L}$ est semi-positive (au sens de [**59**, § 1.12] et [**85**, § 1, (1.1)]), le théorème des minimums successifs de Zhang peut s'énoncer de la façon suivante.

Théorème 1.5.6 (Théorème 5.2 de [**85**]). *Supposons que X est de pure dimension d, que le fibré inversible $\mathscr{L}$ est ample, et que la métrique sur $\mathscr{L}$ est semi-positive. Les inégalités suivantes sont vérifiées :*

$$e_1(\overline{\mathscr{L}}) + \cdots + e_d(\overline{\mathscr{L}}) \leq h_{\overline{\mathscr{L}}}(X) \leq d e_1(\overline{\mathscr{L}}).$$

Remarquons que le théorème 5.2 de [**85**] est énoncé avec la condition supplémentaire que la métrique sur $\mathscr{L}$ est semi-ample au sens de [**85**, § 5] ; d'après un théorème de Moriwaki [**61**, théorème 0.2], cette condition est vérifiée dans la situation présentée ci-dessus.

Considérons la structure de fibré adélique sur $V = \mathrm{H}^0(X, \mathscr{L})$ donnée par la famille de normes $(\|.\|_{v,\sup})_{v \in \Sigma_K}$.

Lemme 1.5.7. *Supposons que X est irréductible, que le fibré inversible $\mathscr{L}$ est très ample, et que la métrique sur $\mathscr{L}$ est semi-positive. On a l'inégalité suivante :*

$$-\lambda_1(V) = \min_{s \in V \setminus \{0\}} h_{\mathscr{L}}(s) \leq e_1(\overline{\mathscr{L}}).$$

En particulier, si $e_d(\overline{\mathscr{L}}) \geq 0$ (c'est à dire si $h_{\overline{\mathscr{L}}}(x) \geq 0$ pour tout $x \in X(\overline{K})$), on a

$$-\lambda_1(V) \leq h_{\overline{\mathscr{L}}}(X).$$

Démonstration : La preuve de l'énoncé reprend les arguments de la démonstration du corollaire 5.7 de [**85**]. Soit $s \in V$ une section non nulle telle que $\lambda_1(V) = h_{\mathscr{L}}(s)$. On note U_s l'ouvert non vide des points $x \in X$ vérifiant $s(x) \neq 0$. Pour tout point $x \in U_s(\overline{K})$, on a

$$h_{\mathscr{L}}(x) = -\sum_{v \in \Sigma_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|s(x)\|_v \geq -\sum_{v \in \Sigma_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} = -h_{\mathscr{L}}(s) = -\lambda_1(V).$$

On en déduit que $e_{\mathscr{L}}(U_s) \geq -\lambda_1(V)$. Or pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point $x \in U_s(\overline{K})$ tel que

$$e_1(\overline{\mathscr{L}}) \geq h_{\mathscr{L}}(x) - \varepsilon \geq e_{\mathscr{L}}(U_s) - \varepsilon \geq -\lambda_1(V) - \varepsilon.$$

On obtient la première inégalité en faisant tendre ε vers 0. La seconde est une conséquence immédiate du théorème 1.5.6.

□

Signalons que si $\iota \colon X \to \mathbb{P}^n_K$ est une sous-variété irréductible d'un espace projectif $\mathbb{P}^n_K$ et si $\mathscr{L} = \iota^* \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_K}(d)$, $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, est muni de la métrique de l'exemple 1.3.4 de la page 36, alors les hypothèses du théorème 1.5.6 et du lemme 1.5.7 sont vérifiées.

1.6. Filtrations d'un espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K.

1.6.1. Premières définitions.

Définition 1.6.1. Une filtration $(V, \mathscr{F})$ de V est la donnée d'une famille $(\mathscr{F}^t V)_{t \in \mathbb{R}}$ de sous-espace vectoriels de V vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathscr{F}^{t'} V \subseteq \mathscr{F}^t V$ pour tout couple de nombres réels (t, t') tel que $t' \geq t$;
- $\mathscr{F}^t V = V$ si t est suffisamment négatif ;
- $\mathscr{F}^t V = 0$ si t est suffisamment grand ;
- la fonction $t \mapsto \dim \mathscr{F}^t V$ est continue à gauche sur $\mathbb{R}$.

Considérons une filtration $(V, \mathscr{F})$ de V. Cette donnée est équivalente à celle d'un drapeau

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \ldots \supsetneq V_d \supsetneq V_{d+1} = \{0\}$$

et d'une suite finie de nombres réels $\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_d$ (voir [**13**, § 1.2]). En effet, étant donné un tel drapeau, on pose

$$\mathscr{F}^t V = \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq d \\ \beta_i \geq t}} V_i$$

pour tout nombre réel $t \leq \beta_d$. Pour $t > \beta_d$, on pose $\mathscr{F}^t V = \{0\}$. On vérifie immédiatement que l'on définit ainsi une filtration de V. Réciproquement, si $(V, \mathscr{F})$ est une filtration de V, la fonction $f\colon t \mapsto \dim(\mathscr{F}^t V)$ est décroissante, continue à gauche, et à valeurs dans l'ensemble $\{0, \ldots, \dim V\}$. On en déduit qu'il existe des nombres réels $\beta_0 < \ldots < \beta_d$ et des entiers $0 < r_{d-1} < \cdots < r_1 < \dim V$ tels que

$$f = \dim(V)\mathbb{1}_{]-\infty, \beta_0]} + \sum_{i=0}^{d-1} r_i \mathbb{1}_{]\beta_i, \beta_{i+1}]}.$$

En posant $V_i = \mathscr{F}^{\beta_i} V$ pour tout $i \in \{0, \cdots, d\}$, on obtient bien un drapeau $V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \ldots \supsetneq V_d \supsetneq V_{d+1} := \{0\}$ et une suite finie de nombre réels strictement croissante $(\beta_i)_{0 \leq i \leq d}$.

Définition 1.6.2. La pente de la filtration $(V, \mathscr{F})$ est le nombre réel

$$\mu_{\mathscr{F}}(V) = \frac{1}{\dim V} \sum_{i=0}^{d} \beta_i \dim(V_i / V_{i+1}).$$

On associe à $(V, \mathscr{F})$ une variable aléatoire $Z_{\mathscr{F}}$ sur $\{1, \ldots, \dim V\}$ (muni de la mesure de comptage), en posant $Z_{\mathscr{F}}(n) = \beta_i$ pour tout $n \in [\dim V_{i+1}; V_i[$, $0 \leq i \leq d$. Un calcul direct montre que pour tout nombre réel $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(Z_{\mathscr{F}} \geq t) = \frac{\dim \mathscr{F}^t V}{\dim V},$$

et que l'espérance $\mathbb{E}(Z_{\mathscr{F}})$ de $Z_{\mathscr{F}}$ vérifie

$$\mathbb{E}(Z_{\mathscr{F}}) = \mu_{\mathscr{F}}(V).$$

Pour tout sous-espace vectoriel W de V, on construit des filtrations $(W, \mathscr{F})$ et de $(V/W, \mathscr{F})$ induites par $(V, \mathscr{F})$ en considérant, pour tout nombre réel t, les sous-espaces vectoriels de W et V/W définis par $\mathscr{F}^t W = W \cap \mathscr{F}^t V$ et $\mathscr{F}^t(V/W) = (\mathscr{F}^t V)/(\mathscr{F}^t W)$.

Définition 1.6.3. Nous dirons qu'une base $(e_1, \ldots, e_{\dim V})$ de V est adaptée à la filtration $(V, \mathscr{F})$ si pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, on a

$$V_i = \mathrm{Vect}\{e_j \mid \dim V - \dim V_i < j \leq \dim V\}.$$

1.6.2. Semi-stabilité et sous-espace déstabilisant maximal. Soit r un entier naturel non nul. Pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$, considérons une filtration $(V, \mathscr{F}_k)$ de V. Pour tout sous-espace vectoriel $W \subsetneq V$, notons

$$\mu(W) = \mu((W, \mathscr{F}_k)_k) := \mu(W, \mathscr{F}_1) + \cdots + \mu(W, \mathscr{F}_r)$$

et

$$\mu(V/W) = \mu((V/W, \mathscr{F}_k)_k) := \mu(V/W, \mathscr{F}_1) + \cdots + \mu(V/W, \mathscr{F}_r)$$

Lemme 1.6.4. *Soit W un sous-espace vectoriel de V tel que $0 < \dim W < \dim V$. Alors $\mu(W) \leq \mu(V)$ si et seulement si $\mu(V) \leq \mu(V/W)$.*

Démonstration : Pour tout nombre réel t et pour tout entier $k \in \{1, \ldots, r\}$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{F}_k^t W \longrightarrow \mathscr{F}_k^t V \longrightarrow \mathscr{F}_k^t(V/W) \longrightarrow 0.$$

On en déduit que $\dim(V)\mu(V, \mathscr{F}_k) = \dim(W)\mu(W, \mathscr{F}_k) + \dim(V/W)\mu(V/W, \mathscr{F}_k)$, et en faisant la somme sur k, on obtient

$$\dim(V)\mu(V) = \dim(W)\mu(W) + \dim(V/W)\mu(V/W).$$

Si $\mu(W) \leq \mu(V)$, on en déduit que $\dim(V)\mu(V) \leq \dim(W)\mu(V) + \dim(V/W)\mu(V/W)$, donc $\dim(V/W)\mu(V) = (\dim(V) - \dim(W))\mu(V) \leq \dim(V/W)\mu(V/W)$, et on a bien $\mu(V) \leq \mu(V/W)$. Si $\mu(V) \leq \mu(V/W)$, on a montre de la même façon que $\mu(V) \geq \mu(W)$.

□

DÉFINITION 1.6.5. Nous dirons que la famille de filtrations $(V, \mathscr{F}_k)_{k\in\{1,\ldots,r\}}$ est semi-stable si pour tout sous-espace vectoriel non nul W de V, on a $\mu(W) \leq \mu(V)$.

D'après le lemme 1.6.4, la famille de filtrations $(V, \mathscr{F}_k)_{k\in\{1,\ldots,r\}}$ est semi-stable si et seulement si pour tout sous-espace vectoriel $W \subsetneq V$, on a $\mu(V/W) \geq \mu(V)$.

LEMME 1.6.6. *Soit V_1 un sous-espace vectoriel non nul de V tel que la famille de filtrations induite $(V_1, (\mathscr{F}_k)_{1\leq k\leq r})$ soit semi-stable. Soit $V_2 \subsetneq V$ un sous-espace vectoriel non nul de V tel que pour tout sous-quotient non nul $Z \subsetneq V/V_2$, on ait $\mu(Z) < \mu(V_2)$. Si $V_1 \nsubseteq V_2$, on a $\mu(V_1) < \mu(V_2)$.*

Démonstration : Soit $\pi \colon V \to V/V_2$ la surjection canonique. Si $V_1 \nsubseteq V_2$, on a $\pi(V_1) \neq \{0\}$. Par semi-stabilité de V_1, on a $\mu(V_1) \leq \mu(\pi(V_1))$ et par hypothèse, $\mu(\pi(V_1)) < \mu(V_2)$. On a donc bien $\mu(V_1) < \mu(V_2)$.

□

LEMME 1.6.7. *Il existe un unique sous-espace W non nul de V de dimension maximale tel que la famille de filtrations induites $(W, (\mathscr{F}_k)_{1\leq k\leq r})$ soit semi-stable.*

Démonstration : Commençons par montrer l'existence de W. Si la famille $(V, (\mathscr{F}_k)_{1\leq k\leq r})$ est semi-stable, on pose $W = V$. Sinon, soit $m = \max\{\mu(F) \mid \{0\} \neq F \subset V\}$ et soit W un sous-espace vectoriel non nul de dimension maximale tel que $\mu(W) = m$. Alors la famille $(W, (\mathscr{F}_k)_{1\leq k\leq r})$ est semi-stable. Pour montrer l'unicité, considérons un sous-espace vectoriel W' de V tel que $\dim W' = \dim W$ et $\mu(W') = \mu(W) = m$. Nous devons montrer que $W = W'$. Supposons que $W \nsubseteq W'$. Soit $Z \subsetneq V/W'$ un sous-quotient non nul et soit $\pi \colon V \to V/W'$ la surjection canonique. En notant $\widetilde{Z} = \pi^{-1}(Z)$, on a $V_2 \subsetneq \widetilde{Z}$, donc $\dim \widetilde{Z} > \dim W'$. Par maximalité de W', on a donc $\mu(\widetilde{Z}) < \mu(W')$. Par ailleurs, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow \widetilde{Z} \longrightarrow Z \longrightarrow 0.$$

Par le lemme 1.6.4, on en déduit que $\mu(Z) < \mu(\widetilde{Z})$, et donc $\mu(Z) < \mu(W')$. Par le lemme 1.6.6, on a donc $\mu(W) < \mu(W')$, ce qui est absurde. On en déduit l'inclusion $W \subseteq W'$, et donc $W = W'$ par égalité des dimensions.

□

Le sous-espace W du lemme 1.6.7 est appelé sous-espace déstabilisant maximal de la famille de filtrations $(V, \mathscr{F}_k)_k$.

REMARQUE 1.6.8. La notion de semi-stabilité n'a d'intérêt que si $r > 1$, car une filtration $(V, \mathscr{F})$ de V est semi-stable si et seulement si le drapeau associé est trivial : $V = V_0 \supsetneq \{0\}$. En effet, si la filtration est donnée par un drapeau

$$V = V_0 \supsetneq V_1 \supsetneq \ldots \supsetneq V_d \subsetneq V_{d+1} = \{0\}$$

et une suite de réels $\beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_d$ avec $d \geq 1$, on a

$$\mu(V, \mathscr{F}) = \frac{1}{\dim V} \sum_{i=0}^{d} \beta_i \dim(V_i/V_{i+1}) < \beta_d = \mu(V_d, \mathscr{F}).$$

Soient $(V_1, (\mathscr{F}_{1,k})_{1\leq k\leq r})$, $(V_2, (\mathscr{F}_{2,k})_{1\leq k\leq r})$ deux familles de filtrations sur des K-espaces vectoriels V_1 et V_2. On définit une famille de filtrations de l'espace vectoriel $V_1 \otimes_K V_2$ en posant pour tout $k \in \{1, \ldots, r\}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F}_k^t(V_1 \otimes_K V_2) = \mathrm{Vect}\{s_1 \otimes_K s_2 \mid s_1 \in \mathscr{F}_{1,k}^{t_1} V_1,\ s_2 \in \mathscr{F}_{2,k}^{t_2} V_2,\ t_1 + t_2 \geq t\}.$$

En particulier, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, l'espace vectoriel $S^\ell V$ est muni d'une famille de filtration $(S^\ell V, (\mathscr{F}_k)_{1\leq k\leq r})$ par quotient des filtrations sur $V^{\otimes \ell}$ induites par la famille de filtration $(V, (\mathscr{F}_k)_{1\leq k\leq r})$. Un calcul direct (voir par exemple [**29**, proposition 2.1]) montre que

$$\mu(V_1 \otimes_K V_2, (\mathscr{F}_k)_k) = \mu(V_1, (\mathscr{F}_{1,k})_k) + \mu((V_2, (\mathscr{F}_{2,k})_k) \quad \text{et} \quad \mu(S^\ell V, (\mathscr{F}_k)_k) = \ell \mu(V, (\mathscr{F}_k)_k).$$

Un théorème de Faltings et Wüstholz [**26**] affirme que la propriété de semi-stabilité est conservée par produit tensoriel dans le cas où le corps K est de caractéristique nulle. Rapidement après, Faltings [**25**] donna une nouvelle démonstration de ce résultat, valable pour un corps K quelconque, et Evertse [**21**] a récemment montré que ce résultat s'étendait aux filtrations induites par puissance symétrique.

PROPOSITION 1.6.9. *En reprenant les notations ci-dessus, si les familles de filtrations sur V_1 et V_2 sont semi-stables, alors la famille de filtration induite sur $V_1 \otimes_K V_2$ l'est également. Si la famille de filtrations $(V, (\mathscr{F}_k)_k)$ est semi-stable, alors $(S^\ell V, (\mathscr{F}_k)_k)$ est semi-stable pour tout $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

Démonstration : Cet énoncé est une conséquence du corollaire 3.2 de [**21**]. Signalons que la première affirmation correspond au lemme page 650 de [**25**] (et au théorème 4.1 de [**26**] dans le cas où K est de caractéristique 0).

$\square$

Partie 1

Approximation diophantienne sur les variétés projectives

Chapitre 2

Introduction

Cette partie est motivée par l'étude de variantes du théorème A de Faltings et Wüstholz. Nous allons commencer par énoncer une version plus précise de ce théorème, dans un cadre légèrement plus général. Soit K un corps de nombres et soit $\iota\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ une variété projective définie sur K. Nous fixons un choix de coordonnées projectives de $\mathbb{P}^n_K$ et nous munissons le fibré inversible $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_K}(1)$ de la métrique de l'exemple 1.3.4 de la page 36, que l'on note $(\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K}$. Si $x \in X(\overline{K})$, rappelons que la hauteur de x associée à ce choix de métrique est la hauteur de Weil : si L est une extension finie de K et si $\iota(x) = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(L)$, alors

$$h(x) = \sum_{v\in\Sigma_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log\max\{|(x_0|_v, \ldots, |x_n|_v\}$$

(voir l'exemple 1.3.6 page 37). Considérons une extension finie L de K et posons $X_L = X \times_K \operatorname{Spec}(L)$. Notons ι_L le plongement de X_L induit par ι, et posons $\mathscr{O}_{X_L}(1) = \iota_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_L}(1)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\Gamma_k(X) = \mathrm{H}^0(X_L, \mathscr{O}_{X_L}(k))$. Considérons l'algèbre graduée

$$\Gamma_\bullet(X) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_k(X).$$

Dans toute la suite, nous supposerons que l'algèbre $\Gamma_\bullet(X)$ est engendrée par $V := \Gamma_1(X)$ (cette hypothèse est anodine car le cas général s'en déduit, voir la remarque 2.0.3 ci-dessous). Fixons un ensemble fini $\mathscr{P}$ de places de L. Pour toute place $w \in \mathscr{P}$, considérons une $\mathbb{R}$-filtration $(V, \mathscr{F}_w)$ de V. Cette filtration correspond à la donnée d'un drapeau

$$V := V_0^{(w)} \supsetneq V_1^{(w)} \supsetneq \cdots \supsetneq V_{e_w}^{(w)} \supsetneq V_{e_w+1}^{(w)} = \{0\}$$

et d'une suite de nombres réels

$$c_{w,0} < c_{w,1} < \cdots < c_{w,e_w}.$$

Pour toute section $s \in V \setminus \{0\}$, on note

$$\operatorname{ord}_w(s) := \sup\{t \in \mathbb{R} \mid s \in \mathscr{F}_w^t V\} = \max\{c_{w,k} \mid 0 \leq k \leq e_w,\ s \in V_k^{(w)}\}.$$

Considérons une base $(s_{w,j})_{1\leq j\leq \dim V}$ de V adaptée à cette filtration : on a

$$V_k^{(w)} = \operatorname{Vect}\{s_{w,j} \mid \dim V - \dim V_k^{(w)} < j \leq \dim V\}$$

pour tout entier $k \in \{0, \ldots, e_w\}$. Nous noterons $\mu_w(V)$ la pente de cette filtration. Notons W le sous-espace déstabilisant maximal de la famille de filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ (défini au paragraphe 1.6.2), et Z son lieu de base :

$$Z = \{z \in X_L \mid \forall s \in W,\ s(z) = 0\}.$$

Le théorème 9.1 de [**26**] peut alors s'énoncer de la façon suivante.

Théorème 2.0.1. *Supposons que l'on ait $\sum_{w\in\mathscr{P}} \mu_w(W) > [L : \mathbb{Q}]$. Alors il n'existe qu'un nombre fini de points $x \in (X_L \setminus Z)(K)$ satisfaisant le système d'inéquations suivant :*

$$\|s_{w,j}(x)\|_w \leq \exp(-\operatorname{ord}_w(s_{w,j})h(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]) \quad \forall w \in \mathscr{P}, \quad \forall\ 1 \leq j \leq \dim V. \tag{15}$$

Remarque 2.0.2. Le théorème 9.1 de [**26**] est énoncé dans le cas où le plongement ι est l'identité, c'est-à-dire quand $X = \mathbb{P}^n_K$. Nous allons voir qu'il reste valable dans le contexte présenté ci-dessus, comme Faltings et Wüstholz l'ont suggéré à la page 130 de [**26**]. Signalons que Ferretti [**29**] a déjà proposé une démonstration dans un cadre similaire. Par ailleurs, il est important de remarquer que nos normalisations diffèrent légèrement de celles de [**26**]. Dans l'énoncé du théorème 9.1 de [**26**], les quantités $c_{w,j}h(x)/[L_w:\mathbb{Q}_w]$ du système d'inégalité (15) sont remplacées par $c_{w,j}h(x)$, tandis que la somme $\sum_{w\in\mathscr{P}}\mu_w(V)$ du théorème 2.0.1 est remplacée par $\sum_{w\in\mathscr{P}}[L_w:\mathbb{Q}_w]\mu_w(V)$ (car la somme sur les places w de L se fait avec la multiplicité $[L_w:\mathbb{Q}_w]$, voir [**26**, page 110]). Le théorème 2.0.1 est donc bien équivalent au théorème 9.1 de [**26**] (dans le cas $X=\mathbb{P}^n_K$).

Remarque 2.0.3. On peut supprimer l'hypothèse « V engendre $\Gamma_\bullet(X)$ » en modifiant légèrement l'énoncé. Si elle n'est pas vérifiée, on peut considérer un entier k_0 tel que $\Gamma_{k_0}(X)$ engendre $\Gamma_\bullet(X)$. En notant

$$N=\binom{n+k_0}{k_0}-1,$$

on dispose d'un plongement de Veronese $\phi\colon\mathbb{P}^n_K\to\mathbb{P}^N_K$ vérifiant $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_K}(k_0)=\phi^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^N_K}(1)$. Posons $V:=\mathrm{H}^0(X_L,\iota_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(k_0))=\mathrm{H}^0(X,(\phi\circ\iota)^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^N_K}(1))\otimes_K L$. Supposons que l'on ait démontré le théorème 2.0.1. En l'appliquant à $\phi\circ\iota\colon X\to\mathbb{P}^N_K$, on en déduit qu'il n'existe qu'un nombre fini de points $x\in(X_L\setminus Z)(K)$ vérifiant : $\forall w\in\mathscr{P},\ \forall\, 1\leq j\leq\dim V$,

$$\begin{aligned}\|s_{w,j}(x)\|_w &\leq \exp(-\operatorname{ord}_w(s_{w,j})h_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(1)}(x)/[L_w:\mathbb{Q}_w])\\ &=\exp(-\operatorname{ord}_w(s_{w,j})k_0h_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)}(x)/[L_w:\mathbb{Q}_w]).\end{aligned}$$

Le théorème 2.0.1 implique le théorème de Roth de la façon suivante. Posons $K=\mathbb{Q}$ et $X=\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$. Considérons un nombre algébrique $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et une extension galoisienne L de $\mathbb{Q}$ contenant α. Notons $\Sigma_{L,\infty}$ l'ensemble des places infinies de L et fixons $w_0\in\Sigma_{L,\infty}$. Pour toute place $w\in\Sigma_{L,\infty}$, il existe un élément γ_w du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ tel que $|\gamma_w^{-1}(x)|_{w_0}=|x|_w$ pour tout $x\in L$. On pose $s_w=T_0-\gamma_w(\alpha)T_1$. Pour tout $x=(p:q)\in\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ avec p, q premiers entre eux, on a

$$\|s_{w_0}(x)\|_{w_0}=\frac{|p-q\alpha|_{w_0}}{\max(|p|,|q|)}\quad\text{et}\quad\exp h((p:q))=\max(|p|,|q|).$$

Pour tout $x\in\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, on a par ailleurs

$$\|s_w(x)\|_w=\|\gamma_w(s_{w_0}(x))\|_w=\|s_{w_0}(x)\|_{w_0}.$$

Posons $\mathscr{P}=\Sigma_{L,\infty}$. Pour chaque place $w\in\mathscr{P}$, on considère la filtration du L-espace vectoriel $V=\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1_L,\mathscr{O}(1))$ donnée par le drapeau $V=V_0^{(w)}\supsetneq V_1^{(w)}=\mathrm{Vect}_L(s_w)\supsetneq\{0\}$ et la suite de nombres réels $c_{w,0}=0<c_{w,1}=[L_w:\mathbb{Q}_w](2+\varepsilon)$, où ε est un nombre réel strictement positif. Dans ce cas $\mu_w(V)=[L_w:\mathbb{Q}_w](1+\varepsilon/2)$ pour toute place $w\in\mathscr{P}$, et donc $\sum_{w\in\mathscr{P}}\mu_w(V)=\sum_{w\in\Sigma_{L,\infty}}[L_w:\mathbb{Q}_w](1+\varepsilon/2)=[L:\mathbb{Q}](1+\varepsilon/2)>[L:\mathbb{Q}]$. On définit ainsi une famille de filtrations semi-stable, donc $W=V$ et la sous-variété Z du théorème est vide. On en conclut qu'il n'existe qu'un nombre fini de points $p/q\in\mathbb{Q}$ tels que

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|_{w_0}\leq\frac{1}{|q|\max(|p|,|q|)^{1+\varepsilon}},$$

et on en déduit le théorème de Roth en remarquant que $\max(|p|,|q|)=O(|q|)$ pour p/q proche de α.

Le chapitre 3 est consacré à une démonstration alternative du théorème de Faltings et Wüstholz, dans laquelle on fait un usage systématique des éléments la théorie des pentes adéliques rappelés au paragraphe 1.1. Commençons par rappeler le schéma de démonstration de l'article [**26**], en supposant dans un premier temps que la famille de filtrations $(V,\mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ est semi-stable. Pour simplifier, on suppose ici que $L=K$. La preuve de Faltings et Wüstholz repose sur un profonde généralisation du lemme de Roth due à Faltings [**24**], communément appelée théorème du produit. La démonstration débute comme celle du théorème de Roth : on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une infinité de solutions au système (15) dans $X(K)$. On considère un entier m arbitrairement grand et un m-uplet $x=(x_1,\dots,x_m)$ de solutions de (15) dans $X(K)$. Par la propriété de Northcott, on peut supposer que $h(x_1)$ ainsi que les quotients $h(x_{i+1})/h(x_i)$ sont arbitrairement grand. Considérons un m-uplet

$\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$ tel que les quotients $d_1 h(x_1)/(d_i h(x_i))$ soient suffisamment proches de 1. Si s est une section globale de $\mathscr{O}_X(d_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{O}_X(d_m)$ dont l'indice (défini au paragraphe 3.2) en $x = (x_1, \ldots, x_m)$ est suffisamment grand, le théorème du produit permet de construire une sous-variété produit Y telle que

$$\{x\} \subseteq Y = Y_1 \times_K \cdots \times_K Y_m \subsetneq X \times_K \cdots \times_K X.$$

Dans sa version arithmétique, le théorème donne également une majoration de la hauteur des sous-variétés $Y_1, \ldots, Y_m$ de la forme

$$\sum_{i=1}^{m} d_i h(Y_i) \leq c(d_1 + \cdots + d_m + h(s)),$$

où c est une constante indépendante de x et de $\mathbf{d}$. En utilisant l'hypothèse faite sur les points $x_1, \ldots, x_m$, on majore les valeurs absolues des dérivées d'une section globale s en fonction de $h(s)$ et des quotients $h(x_i)/h(x_1)$. On applique ensuite la formule du produit pour obtenir une contradiction, et on en déduit que l'indice de s en x est grand dès que $h(s)$ est suffisamment petite. Par le théorème du produit, on construit une sous-variété produit $Y = Y_1 \times_K \cdots \times_K Y_m \subsetneq X \times_K \cdots \times_K X$ contenant x et vérifiant $h(Y_i) \leq c' h(x_i)/h(x_1)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, où c' est une constante indépendante de x. En répétant ce procédé un nombre fini de fois, on obtient la sous-variété $\{x_1\} \times \cdots \times \{x_m\}$ et une majoration de la forme $h(x_i) \leq c'' h(x_i)/h(x_1)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. On a donc $h(x_1) \leq c''$, ce qui est absurde par hypothèse. Le point clé est donc de construire une section globale de petite hauteur dont on sache minorer l'indice en x. C'est là qu'intervient l'idée fondamentale de l'article [**26**] : on construit un sous-espace vectoriel $W_{\mathbf{d}}$ de l'espace des sections globales $\Gamma_{\mathbf{d}} = \bigotimes_{i=1}^{m} S^{d_i} V$ au moyen de filtrations $(\Gamma_{\mathbf{d}}, \mathscr{F}_w)$, $w \in \mathscr{P}$ induites sur $\Gamma_{\mathbf{d}}$ par la famille de filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w \in \mathscr{P}}$. Si une section s de $\Gamma_{\mathbf{d}}$ est « suffisamment loin » dans les filtrations $(\Gamma_{\mathbf{d}}, \mathscr{F}_w)$, $w \in \mathscr{P}$ (i.e. $s \in \bigcap_{w \in \mathscr{P}} \mathscr{F}_w^{t_w}$ pour des nombres réels t_w assez grands), on a une bonne majoration des valeurs absolues des dérivées de s. L'approche probabiliste des $\mathbb{R}$-filtrations permet alors de minorer le quotient $\dim W_{\mathbf{d}} / \dim \Gamma_{\mathbf{d}}$ et d'appliquer un lemme de Siegel pour construire une section auxiliaire de petite hauteur dans $W_{\mathbf{d}}$. L'hypothèse de semi-stabilité de la famille de filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w \in \mathscr{P}}$ (qui se transmet à $(\Gamma_{\mathbf{d}}, \mathscr{F}_w)_{w \in \mathscr{P}}$ par la proposition 1.6.9 page 45) permet d'appliquer ce raisonnement à chaque étape de la preuve, et démontre le théorème dans le cas semi-stable. On obtient ensuite le cas général en introduisant le lieu de base du sous-espace déstabilisant maximal de $(V, \mathscr{F}_w)_{w \in \mathscr{P}}$ (voir [**26**, § 9]). La démonstration que nous présentons dans le chapitre 3 reprend essentiellement les étapes que nous venons de décrire, traduites dans le langage des fibrés vectoriels adéliques. Nous construisons notamment les sections auxiliaires en utilisant la proposition 1.1.16 de la page 32, et nous remplaçons l'usage de la formule du produit par une inégalité de pentes.

Dans le chapitre 4, nous nous intéresserons à des variantes effectives du théorème 2.0.1 de Faltings et Wüstholz. Nous nous placerons dans un contexte plus général, en considérant un fibré inversible adélique quelconque $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|.\|_v)_{v \in \Sigma_K}$ sur X. Pour chaque place w de $\mathscr{P}$, on considère une filtration $(V, \mathscr{F}_w)$ de l'espace vectoriel $V = \mathrm{H}^0(X, \mathscr{L}) \otimes_K L$ de l'espace des sections globales de $\mathscr{L} \otimes L$. Pour toute place w de $\mathscr{P}$, fixons un nombre réel t_w et considérons le L-espace vectoriel $F = \bigcap_{w \in \mathscr{P}} \mathscr{F}_w^{t_w} V$. On note $\mathscr{B}(F)$ le lieu de base de F, défini par

$$\mathscr{B}(F) = \{x \in X_L \mid \forall\, s \in F,\ s(x) = 0\},$$

et on fixe une base $(s_1, \ldots, s_{\dim F})$ de F. Nous démontrerons le théorème suivant.

Théorème 2.0.4 (Corollaire 4.4.4 page 88). *Pour chaque place w de $\mathscr{P}$, soit C_w un nombre réel non nul. Si $\delta := \sum_{w \in \mathscr{P}} [L_w : \mathbb{Q}_w] t_w > [L : \mathbb{Q}]$, alors tous les points $x \in (X \setminus \mathscr{B}(F))(K)$ satisfaisant le système d'inégalités*

$$\frac{\|s_j(x)\|_w}{\|s_j\|_{w,\sup}} \leq C_w \exp(-t_w h_{\mathscr{L}}(x)) \quad \forall\, 1 \leq j \leq \dim F, \quad \forall\, w \in \mathscr{P}, \tag{16}$$

vérifient

$$h_{\mathscr{L}}(x) \leq \frac{1}{\delta - 1}\left(\sum_{w \in \mathscr{P}} \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]} \log(C_w) + \max_{1 \leq j \leq \dim F} h(s_j)\right).$$

En particulier, ces points sont en nombre fini si $\mathscr{L}$ est ample.

Ce théorème est une variante effective du théorème 2.0.1, fournissant à la fois un lieu de base explicite en dehors duquel il n'existe qu'un nombre fini de solutions au système d'inégalités (16), ainsi qu'une borne explicitement calculable pour la hauteur de ces solutions. La démonstration de ce théorème est bien plus élémentaire que celle du théorème 2.0.1 de Faltings et Wüstholz. Cependant, dans le cas particulier où $\operatorname{card}(\mathscr{P}) = 1$, nous verrons que le théorème 2.0.1 est une conséquence de ce résultat (voir à ce propos la discussion à la fin du paragraphe 4.4). Nous appliquerons ensuite le théorème 2.0.4 pour obtenir une généralisation du théorème de Liouville effectif, valable pour les points fermés de X.

Théorème 2.0.5 (Corollaire 4.1.3 page 82). *Soit $x \in X(L)$. Si $\mathscr{L}$ est ample, il existe une constante $c(x, \mathscr{L})$ effectivement calculable telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout point $y \in X(K)$ distinct de x tel que*

$$\log d_v(x, y) < -\left(\frac{[L : \mathbb{Q}]}{\epsilon_x(\mathscr{L})[L_v : \mathbb{Q}_v]} + \varepsilon\right) h_{\mathscr{L}}(y), \tag{17}$$

on a

$$h_{\mathscr{L}}(y) < -\frac{1}{\varepsilon} c(x, \mathscr{L}).$$

En particulier, les points $y \in X(K)$ satisfaisant (17) sont en nombre fini.

Introduction to part one (English version)

This part is dedicated to the study of theorem A of Faltings and Wüstholz. We will first give the precise statement of this theorem, in a slightly more general context. Let K be a number field and let $\iota\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ be a projective variety defined over K. We fix projective coordinates on $\mathbb{P}^n_K$ and we equip the line bundle $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_K}(1)$ with the metric of example 1.3.4 (page 36), denoted by $(\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K}$. For $x \in X(\overline{K})$, the height of x relative to this choice of metric is the Weil height of x, defined as follows : if L is a finite extension of K such that $\iota(x) = (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(L)$, then

$$h(x) = \sum_{v\in\Sigma_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log\max\{|x_1|_v, \dots, |x_n|_v\}$$

(see example 1.3.6 on page 37). We consider a finite extension L of K and we denote by X_L the scheme $X \times_K \operatorname{Spec}(L)$, and by $\iota_L\colon X_L \hookrightarrow \mathbb{P}^n_L$ the embedding induced by ι. We also put $\mathscr{O}_{X_L}(1) = \iota_L^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_L}(1)$ and $\Gamma_k(X) = \mathrm{H}^0(X_L, \mathscr{O}_{X_L}(k))$ for all $k \in \mathbb{N}$. We consider the graded algebra

$$\Gamma_\bullet(X) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Gamma_k(X).$$

From now on, we assume that the algebra $\Gamma_\bullet(X)$ is generated by $V := \Gamma_1(X)$ (see remark 2.0.8 below for the general case). We fix a finite set $\mathscr{P}$ of places of L. For each $w \in \mathscr{P}$, we consider a filtration $(V, \mathscr{F}_w)$ of V, which corresponds to a flag

$$V = V_0^{(w)} \supsetneq V_1^{(w)} \supsetneq \cdots \supsetneq V_{e_w}^{(w)} \supsetneq V_{e_w+1}^{(w)} = \{0\}$$

and a sequence of real numbers

$$c_{w,0} < c_{w,1} < \cdots < c_{w,e_w}.$$

For any section $s \in V \setminus \{0\}$, we put

$$\operatorname{ord}_w(s) = \sup\{t \in \mathbb{R} \mid s \in \mathscr{F}_w^t V\} = \max\{c_{w,k} \mid 1 \le k \le e_w,\ s \in V_k^{(w)}\}.$$

We consider a basis $(s_{w,j})_{1\le j\le \dim V}$ compatible with the filtration $(V, \mathscr{F}_w)$, i.e. such that for any $k \in \{0, \dots, e_w\}$, we have

$$V_k^{(w)} = \operatorname{Vect}\{s_{w,j} \mid \dim V - \dim V_k^{(w)} < j \le \dim V\}.$$

We denote by $\mu_w(V)$ the slope of the filtration $(V, \mathscr{F}_w)$, by W the maximal destabilizing subspace of the family of filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ (see section 1.6.2), and by Z the base locus of W :

$$Z = \{z \in X_L \mid \forall s \in W,\ s(z) = 0\}.$$

With these notations, theorem 9.1 of [**26**] reads as follows.

THEOREM 2.0.6. *If $\sum_{w\in\mathscr{P}} \mu_w(W) > [L : \mathbb{Q}]$, then there are only finitely many points $x \in (X_L \setminus Z)(K)$ with*

$$\|s_{w,j}(x)\|_w \le \exp(-\operatorname{ord}_w(s_{w,j})h(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]) \quad \forall w \in \mathscr{P}, \quad \forall\ 1 \le j \le \dim V. \tag{18}$$

REMARK 2.0.7. Theorem 9.1 in [**26**] is stated in the particular case where $X = \mathbb{P}^n_K$. We will see that it is also true in the setting we presented above, as suggested by Faltings and Wüstholz on page 130 of [**26**]. We mention that Ferretti [**29**] gave a proof of this result in a similar context. Let us also emphasize that our normalisations sightly differ from the ones of [**26**, Theorem 9.1], where the quantities $c_{w,j}h(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]$ in (18) are replaced by $c_{w,j}h(x)$, while the assumption is $\sum_{w\in\mathscr{P}}[L_w : \mathbb{Q}_w]\mu_w(W) > [L : \mathbb{Q}]$ (because places w are counted with multiplicity $[L_w : \mathbb{Q}_w]$, see [**26**, page 110]). In the case where $X = \mathbb{P}^n_K$, theorem 2.0.6 is thus equivalent to theorem 9.1 of [**26**].

REMARK 2.0.8. We can remove the hypothesis "$\Gamma_\bullet(X)$ is generated by V" by slightly modifying the statement of theorem 2.0.6. In the general case, we can consider a positive integer k_0 such that $\Gamma_{k_0}(X)$ generates $\Gamma_\bullet(X)$. We put

$$N = \binom{n+k_0}{k_0} - 1,$$

and we consider the Veronese embedding $\phi\colon \mathbb{P}^n_K \to \mathbb{P}^N_K$, which satisfies $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_K}(k_0) = \phi^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^N_K}(1)$. By applying theorem 2.0.6 to $\phi\circ\iota\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^N_K$, we have that there are only finitely many points $x \in (X_L \setminus Z)(K)$ with : $\forall w \in \mathscr{P}$, $\forall\ 1 \leq j \leq \dim V$,

$$\begin{aligned}\|s_{w,j}(x)\|_w &\leq \exp(-\operatorname{ord}_w(s_{w,j})h_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(1)}(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]) \\ &= \exp(-\operatorname{ord}_w(s_{w,j})k_0 h_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1)}(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]).\end{aligned}$$

Theorem 2.0.6 implies Roth's theorem in the following way. We consider an algebraic number $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ and a Galois extension L of K containing x. We denote by $\Sigma_{L,\infty}$ the set of archimedean places of L and we fix a place $w_0 \in \Sigma_{L,\infty}$. For each place $w \in \Sigma_{L,\infty}$, there exists an element $\gamma_w \in \operatorname{Gal}(L/\mathbb{Q})$ such that $|\gamma_w^{-1}(x)|_{w_0} = |x|_w$ for all $x \in L$. We put $s_w = T_0 - \gamma_w(\alpha)T_1$. For all $x = (p : q) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, with p and q co-prime integers, we have

$$\|s_{w_0}(x)\|_{w_0} = \frac{|p - q\alpha|_{w_0}}{\max\{|p|,|q|\}} \quad \text{et} \quad h((p:q)) = \max\{|p|,|q|\}.$$

For all $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$, we also have

$$\forall w \in \mathscr{P},\ \|s_w(x)\|_w = \|\gamma_w(s_{w_0}(x))\|_w = \|s_{w_0}(x)\|_{w_0}.$$

For each place w of $\mathscr{P} := \Sigma_{L,\infty}$, we consider the filtration of the L-vector space $V = \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1_L, \mathscr{O}(1))$ given by the flag $V = V_0^{(w)} \supsetneq V_1^{(w)} = \operatorname{Vect}_L(s_w) \supsetneq \{0\}$ and the sequence of real numbers $c_{w,0} = 0 < c_{w,1} = [L_w : \mathbb{Q}_w](2+\varepsilon)$, where ε is a positive real number. We have $\mu_w(V) = [L_w : \mathbb{Q}_w](1+\varepsilon/2)$ for each place $w \in \mathscr{P}$, and thus $\sum_{w\in\mathscr{P}} \mu_w(V) = \sum_{w\in\Sigma_{L,\infty}} [L_w : \mathbb{Q}_w](1+\varepsilon/2) = [L:\mathbb{Q}](1+\varepsilon/2) > [L:\mathbb{Q}]$. Moreover the family of filtrations we just defined is semi-stable, so the subvariety Z of the theorem is empty. We conclude that there are only finitely many rational numbers $p/q \in \mathbb{Q}$ with

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|_{w_0} \leq \frac{1}{|q|\max(|p|,|q|)^{1+\varepsilon}},$$

and Roth's theorem follows (note that $\max(|p|,|q|) = O(|q|)$ when p/q is close to α).

In chapter 3, we give an alternative proof of Faltings and Wüstholz's theorem, in the formalism of adelic slope theory. We will now sketch the original proof Faltings and Wüstholz given in [**26**]. To simplify, we will assume that $K = L$. Suppose at first that the family of filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ is semi-stable. The demonstration relies on a deep generalisation of Roth's lemma due to Faltings [**24**], namely the product theorem. Assume that the conclusion of theorem 2.0.6 is false and consider an integer m sufficiently large and a m-tuple $x = (x_1, \ldots, x_m)$ of solutions of (18) in $X(K)$. By Northcott property, we can choose x such that the quotients $h(x_{i+1})/h(x_i)$ are as large as we want. We consider a m-tuple $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$ such that the quotients $d_1 h(x_1)/d_i h(x_i)$ are sufficiently close to 1. If s is a global section of $\mathscr{O}_X(d_1) \otimes \cdots \mathscr{O}_X(d_m)$ such that the index of s at x (see section 3.2) is sufficiently large, the product theorem provides subvarieties $Y_1, \ldots, Y_m$ of X such that

$$\{x\} \subset Y := Y_1 \times_K \cdots \times_K Y_m \subsetneq X \times_K \cdots \times_K X$$

and

$$\sum_{i=1}^m d_i h(x_i) \leq c(d_1 + \cdots + d_m + h(s)),$$

where c is a constant independent of x and $\mathbf{d}$. By using the fact that the points $x_1, \ldots, x_m$ are solutions of (18), we bound the absolute values of the non-zero derivatives of a global section s in terms of $h(s)$ and $h(x_i)/h(x_1)$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. We then apply the product formula to show that the index of s at x is large provided that the height of s is small. By the product theorem, there exists a product of varieties $Y = Y_1 \times_K \cdots \times_K Y_m \subsetneq X \times_K \cdots \times_K X$, containing x and such that $h(Y_i) \leq c' h(x_i)/h(x_1)$ for all $i \in \{1, \ldots, m\}$, where c' is a constant independent of x. We repeat this process until we obtain the subvariety $\{x_1\} \times_K \cdots \times_K \{x_m\}$, and thus for all $i \in \{1, \ldots, m\}$, we have $h(x_i) \leq c'' h(x_i)/h(x_1)$ for some constant c''. We get $h(x_1) \leq c''$, which leads to a contradiction provided that we chose $h(x_1)$ sufficiently large. In the proof, we have to construct a global section with a small height and small derivatives at x. Here we need the key argument of [**26**] : we construct a subspace $W_{\mathbf{d}}$ of $\Gamma_{\mathbf{d}} = \bigotimes_{i=1}^m S^{d_i} V$ by means of filtrations $(\Gamma_{\mathbf{d}}, \mathscr{F}_w)$, $w \in \mathscr{P}$, induced on $\Gamma_{\mathbf{d}}$ by the family of filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w \in \mathscr{P}}$. If a section $s \in \Gamma_{\mathbf{d}}$ lies in a subspace of the form $\bigcap_{w \in \mathscr{P}} \mathscr{F}_w^{t_w}$ for sufficiently large real numbers t_w, we can bound the absolute values of the successive derivatives of s. The probabilistic approach for $\mathbb{R}$-filtrations gives a lower bound for the quotient $\dim W_{\mathbf{d}} / \dim \Gamma_{\mathbf{d}}$, and we obtain a section s with small height in $W_{\mathbf{d}}$ by applying a Siegel's lemma. The semi-stability assumption (which is also verified by $(\Gamma_{\mathbf{d}}, \mathscr{F}_w)_{w \in \mathscr{P}}$ by proposition 1.6.9, page 45) allows one to repeat this process at each step of the proof. In this way we prove the theorem under the assumption that the family of filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w \in \mathscr{P}}$ is semi-stable, and we deduce the general case by considering the base locus of the maximal destabilizing subspace of $(V, \mathscr{F}_w)_{w \in \mathscr{P}}$ (see [**26**, section 9]). The proof we shall present in chapter 3 relies essentially on the same arguments, transcribed in the language of adelic vector bundles. In particular, we will construct auxiliary sections by means of proposition 1.1.16 (page 32), and we replace the use of the product formula by a slope inequality.

In chapter 4, we prove effective variants of theorem 2.0.6 of Faltings and Wüstholz. We consider a more general setting, involving an arbitrary adelic line bundle $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|.\|_v)_{v \in \Sigma_K})$ on X. For each place $w \in \mathscr{P}$, we consider a filtration $(V, \mathscr{F}_w)_{w \in \mathscr{P}}$ of the L-vector space $V := \mathrm{H}^0(X, \mathscr{L}) \otimes_K L$ of global sections of $\mathscr{L} \otimes L$ and a real number t_w. We put $F = \bigcap_{w \in \mathscr{P}} \mathscr{F}_w^{t_w} V$ and we denote by $\mathscr{B}(F)$ the base locus of F, defined by

$$\mathscr{B}(F) = \{x \in X_L \mid \forall s \in F,\ s(x) = 0\}.$$

Let $(s_1, \ldots, s_{\dim F})$ be a basis for F. With these notations, we will prove the following theorem.

THEOREM 2.0.9 (Corollary 4.4.4, page 88). *For each place w of $\mathscr{P}$, let C_w be a nonzero real number. If $\delta := \sum_{w \in \mathscr{P}} [L_w : \mathbb{Q}_w] t_w > [L : \mathbb{Q}]$, then for all $x \in (X \setminus \mathscr{B}(F))(K)$ with*

$$\frac{\|s_j(x)\|_w}{\|s_j\|_{w,\sup}} \leq C_w \exp(-t_w h_{\mathscr{L}}(x)) \quad \forall\ 1 \leq j \leq \dim F, \quad \forall\ w \in \mathscr{P}, \tag{19}$$

we have

$$h_{\mathscr{L}}(x) \leq \frac{1}{\delta - 1} \left(\sum_{w \in \mathscr{P}} \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]} \log(C_w) + \max_{1 \leq j \leq \dim F} h(s_j) \right).$$

In particular, there are only finitely many points $x \in (X \setminus \mathscr{B}(F))(K)$ satisfying (19) *if $\mathscr{L}$ is ample.*

This result is an effective variant of theorem 2.0.6, which provides both an explicit base locus outside of which (19) has only finitely many solutions and an explicit bound for the height of these solutions. Although the proof of this theorem is relatively elementary, we shall see that in the particular case where $\mathrm{card}(\mathscr{P}) = 1$, it actually implies theorem 2.0.6, and makes it effective (see section 4.4). We will then apply theorem 2.0.9 to prove an effective generalization of Liouville's theorem for projective varieties, a consequence of which is the following theorem.

THÉORÈME 2.0.10 (Corollary 4.1.3, page 82). *Let $x \in X(L)$ be a non-singular point. If $\mathscr{L}$ is ample, there exists an explicitly computable constant $c(x, \mathscr{L})$ such that for all $\varepsilon > 0$ and for all points $y \in X(K)$ distinct from x with*

$$\log d_v(x, y) < -\left(\frac{[L : \mathbb{Q}]}{\epsilon_x(\mathscr{L})[L_v : \mathbb{Q}_v]} + \varepsilon \right) h_{\mathscr{L}}(y), \tag{20}$$

we have

$$h_{\mathscr{L}}(y) < -\frac{1}{\varepsilon}c(x, \mathscr{L}).$$

In particular, there are only finitely many points $y \in X(K)$ *satisfying* (20).

Chapitre 3

Théorème de Faltings et Wüstholz et théorie des pentes adéliques

3.1. Énoncé équivalent et étapes de la démonstration

L'objet de ce chapitre est de démontrer le théorème 2.0.1 avec des outils de la théorie des pentes adélique. Reprenons les notations introduites au début du chapitre 2. Nous allons commencer par donner un énoncé équivalent du théorème 2.0.1.

THÉORÈME 3.1.1. *Supposons que l'on ait $\sum_{w\in\mathscr{P}}\mu_w(W) > [L:\mathbb{Q}]$. Alors il n'existe qu'un nombre fini de points $x \in (X_L \setminus Z)(K)$ satisfaisant le système d'inéquations suivant :*

$$\frac{\|s(x)\|_w}{\|s\|_{w,\sup}} \leq \exp(-th(x)/[L_w:\mathbb{Q}_w]) \quad \forall w \in \mathscr{P},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall s \in (\mathscr{F}_w^t V)\otimes_L \mathbb{C}_w \setminus \{0\}. \tag{21}$$

Le théorème 2.0.1 implique trivialement le théorème 3.1.1. On a également l'implication inverse, comme le montre le lemme suivant.

LEMME 3.1.2. *Les théorèmes 2.0.1 et 3.1.1 sont équivalents.*

Démonstration : Il suffit de montrer que toute solution du système d'inégalité (15) est solution d'un système d'inégalité de la forme (21). Soit $x \in X(K)$ vérifiant le système d'inégalités (15) et soit $w \in \mathscr{P}$. Si w est une place finie, on note $\alpha_w \in]0,1]$ la borne supérieure des nombres réels $\alpha \in]0,1[$ tels que la base $(s_{w,j})_j$ soit α-orthogonale pour w, c'est à dire

$$\|\sum_{j=1}^{\dim V} a_j s_{w,j}\|_{w,\sup} \geq \alpha \max_{1\leq j\leq \dim V}(|a_j|_w \|s_{w,j}\|_{w,\sup})$$

pour tout $\sum_j a_j s_{w,j} \in V\otimes_L \mathbb{C}_w$. Si w est archimédienne, alors par équivalence des normes il existe un nombre réel α_w tel que

$$\|\sum_{j=1}^{\dim V} a_j s_{w,j}\|_{w,\sup} \geq \alpha_w \sum_{1\leq j\leq \dim V}(|a_j|_w \|s_{w,k_w,j}\|_{w,\sup})$$

pour tout $\sum_j a_j s_{w,j} \in V\otimes_L \mathbb{C}_w$. On a ainsi

$$\|\sum_j a_j s_{w,j}\|_{w,\sup} \geq \alpha_w \sum_j (|a_j|_w \|s_{w,j}\|_{w,\sup}) \geq \alpha_w \left(\sum_j |a_j|_w\right)\cdot \min_j \|s_{w,j}\|_{w,\sup}.$$

Dans tous les cas, on a donc

$$\|\sum_{j=1}^{\dim V} a_j s_{w,j}\|_{w,\sup} \geq \alpha_w |(a_1,\ldots,a_{\dim V})|_{2,w} \min_{1\leq j\leq \dim V} \|s_{w,j}\|_{w,\sup}.$$

Fixons un nombre réel t et considérons une section non nulle $s = \sum_j a_j s_{w,j}$ dans $(\mathscr{F}_w^t V) \otimes_L \mathbb{C}_w$; si w est finie, on a alors

$$\begin{aligned}
\|s(x)\|_w = \| \sum_{j \geq \dim \mathscr{F}_w^t V} a_j s_{w,j}(x) \|_w &\leq \max_{j \geq \dim \mathscr{F}_w^t V} |a_j|_w \|s_{w,j}(x)\|_w \\
&\leq \exp(-th(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]) \max_{j \geq \dim \mathscr{F}_w^t V} |a_j|_w \\
&\leq (\alpha_w \min_j \|s_{w,j}\|_{w,\sup})^{-1} \exp(-th(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]) \|s\|_{w,\sup} \\
&= C_w \exp(-th(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]) \|s\|_{w,\sup},
\end{aligned}$$

où $C_w = (\alpha_w \min_j \|s_{w,j}\|_{w,\sup})^{-1} \in [1, +\infty[$. On démontre de la même façon un résultat similaire si $w|\infty$. On en déduit qu'il existe une famille de nombres réels $(C_w)_{w \in \mathscr{P}} \in [1, +\infty[^{\operatorname{card} \mathscr{P}}$ telle que pour tout $x \in X(K)$ satisfaisant le système d'inégalités (15), on ait

$$\frac{\|s(x)\|_w}{\|s\|_{w,\sup}} \leq C_w \exp(-th(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]) \quad \forall w \in \mathscr{P}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \ \forall s \in (\mathscr{F}_w^t V) \otimes_L \mathbb{C}_w \setminus \{0\}.$$

Soit $\alpha' \in]0, 1[$ un nombre réel. Par la propriété de Northcott, on peut supposer sans perte de généralité que pour toute place $w \in \mathscr{P}$ et pour tout nombre réel $t \in [\min_w c_{w,0} ; \max_w c_{w,e_w}]$, on ait

$$C_w \exp(-th(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]) \leq \exp(-\alpha' th(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]).$$

On en déduit que le point x satisfait le système d'inégalités

$$\frac{\|s(x)\|_w}{\|s\|_{w,\sup}} \leq \exp(-th(x)/[L_w : \mathbb{Q}_w]) \quad \forall w \in \mathscr{P}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}, \ \forall s \in (\mathscr{G}_w^t V) \otimes_L \mathbb{C}_w \setminus \{0\},$$

où $\mathscr{G}_w^t V = \mathscr{F}_w^{t/\alpha'} V$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour toute place $w \in \mathscr{P}$. Si α' est suffisamment proche de 1, on a par ailleurs $\sum_{w \in \mathscr{P}} \mu(V, \mathscr{G}_w) > [L : \mathbb{Q}]$ et le lieu de base de la famille de filtrations $(V, \mathscr{G}_w)_{w \in \mathscr{P}}$ coïncide avec W (voir [**26**, pages 118-119]). En appliquant le théorème 3.1.1, on en déduit qu'il n'existe qu'un nombre fini de points $x \in (X_L \setminus Z)(K)$ vérifiant (15).

□

Nous commencerons par rappeler la définition de l'indice d'une section et par énoncer la version du théorème du produit de Faltings dont nous aurons besoin (paragraphes 3.2 et 3.3). Nous adapterons ensuite les lemmes analytiques utilisés par Faltings et Wüstholz ([**26**, § 7]), en en donnant des versions valables pour les sections globales d'un fibré inversible (§ 3.4). Le paragraphe 3.5 contient ensuite tous les arguments clés de la démonstration. Nous commencerons par rappeler la construction des filtrations induites et de l'espace vectoriel $W_{\mathbf{d}}$ des sections auxiliaires (§ 3.5.1, § 3.5.2). Nous suivrons essentiellement la même démarche que Faltings et Wüstholz. Les nouveautés principales apparaissent à partir du paragraphe 3.5.3, où nous introduirons une structure de fibré adélique sur $W_{\mathbf{d}}$ afin de minorer sa pente. Cette étape joue le rôle du lemme de Siegel dans la démonstration originelle de [**26**]. Le paragraphe 3.5.4 est le plus technique, et est consacré à la minoration de l'indice d'une section de $W_{\mathbf{d}}$ (proposition 3.5.6). Nous ferons une utilisation systématique des éléments de la théorie des pentes adélique dans cette partie. Nous pourrons ensuite démontrer le théorème 3.1.1 (§ 3.6). Enfin, nous démontrerons plusieurs corollaires de notre démonstration au paragraphe 3.7, qui reposent sur l'utilisation du lemme de Siegel d'évitement (théorème 1.1.23 page 34).

3.2. Bonnes projections et indice d'une section

Commençons par rappeler la notion de bonne projection, introduite par Faltings dans [**24**] (voir notamment le corollaire 2.14 page 557 de [**24**]).

Proposition 3.2.1. *Soit X une sous-variété de pure dimension $\dim X$ de $\mathbb{P}_K^n$. Il existe une constante c_1 ne dépendant que de n vérifiant les propriétés suivantes. Il existe un polynôme homogène $F \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_K^n, \mathscr{O}(N)) \setminus \{0\}$ et un morphisme $\pi : X \to \mathbb{P}^{\dim X}$ tel que*

(1) π est étale sur $X \setminus (X \cap V(F))$,

(2) $N \leq (n - \dim(X)) \deg(X)$,

(3) $h(F) \leq (n - \dim(X))(h(X) + c_1 \deg(X)^2)$,

(4) $V(F)$ *contient tous les points singuliers de* X.

Notons $G = N_\pi(F|_X) \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}_K^{\dim X}, \mathscr{O}(M))$ *la norme de* F *(voir* [**20**, § 6.5]*). Le polynôme homogène* G *vérifie les propriétés suivantes :*

(1) le faisceau d'idéaux de $V(G)$ *annule* $\Omega^1_{X/\mathbb{P}^{\dim X}}$,

(2) $M \leq (n - \dim(X)) \deg(X)^2$,

(3) $h(G) \leq h(F) + c_1 \deg(X)^2$.

Démonstration. Cet énoncé est une version moins précise de la proposition 4.5 et du corollaire 4.6 de [**29**] (où la constante c_1 est explicite). □

Définition 3.2.2. Nous dirons qu'une application π vérifiant les conditions de la proposition 3.2.1 est une bonne projection de X, et le polynôme G est appelé polynôme associé à π.

Remarque 3.2.3. Soit X une variété projective de pure dimension $\dim X$. Considérons une bonne projection $\pi \colon X \to \mathbb{P}_K^{\dim X}$. Notons G le polynôme associé à π et I_G le faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^{\dim X}}$ de $V(G)$. Soit x un point de X tel que $\pi(x)$ n'appartienne pas à $V(G)$. D'après la proposition 6.1.24 de [**54**], on dispose d'une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\Omega^1_{X/\mathbb{P}^{\dim X}}, \mathscr{O}_X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\Omega^1_{X/K}, \mathscr{O}_X) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\pi^*\Omega^1_{\mathbb{P}^{\dim X}/K}, \mathscr{O}_X).$$

Comme I_G annule $\Omega_{X/\mathbb{P}^{\dim X}}$, on en déduit que

$$\pi^{-1} I_G \cdot \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_X}(\Omega^1_{X/K}, \mathscr{O}_X) = \pi^* \left(I_G \cdot \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^{\dim X}}}(\Omega^1_{\mathbb{P}^{\dim X}/K}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{\dim X}}) \right).$$

Par ailleurs, rappelons que comme π est étale en x, l'application

$$T_{\mathbb{P}^{\dim X}, \pi(x)} \to T_{X,x}, \quad \widetilde{\partial} \mapsto \pi^* \widetilde{\partial}$$

est un isomorphisme (où $T_{\mathbb{P}^{\dim X}, \pi(x)}$, $T_{X,x}$ désignent les espaces tangents).

Nous allons maintenant définir l'indice d'une section d'un fibré inversible. Soit m un entier naturel non nul et soient $Y_1, \ldots, Y_m$ des variétés projectives définies sur un corps K. Notons $Y = Y_1 \times_K \cdots \times_K Y_m$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on se donne une base $\partial_{i,1}, \ldots, \partial_{i,\ell_i}$ de $\mathrm{H}^0(Y_i, \mathrm{Hom}(\Omega^1_{Y_i/K}, \mathscr{O}_{Y_i}))$. Considérons un m-uplet $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ d'entiers naturels non nuls et notons $\mathscr{O}_Y(\mathbf{d}) = \mathscr{O}_{Y_1}(d_1) \otimes_K \cdots \otimes_K \mathscr{O}_{Y_m}(d_m)$. Considérons un point régulier $x = (x_1, \ldots, x_m) \in Y$ et une trivialisation de $\mathscr{O}_Y(\mathbf{d})$ autour de x, donnée par une section s_0 ne s'annulant pas au voisinage de x. Pour toute section $s \in \mathrm{H}^0(Y, \mathscr{O}_Y(\mathbf{d}))$, il existe une fonction f telle que $s = f \cdot s_0$ au voisinage de x. On définit l'indice de s en x (relativement à $\mathbf{d}$), noté $\mathrm{ind}_x(s)$, comme étant le plus petit nombre rationnel positif σ tel qu'il existe un m-uplet $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\tau}_m) \in \mathbb{N}^{\ell_1} \times \cdots \times \mathbb{N}^{\ell_m}$ vérifiant $\sum_{i=1}^m \frac{|\boldsymbol{\tau}_i|}{d_i} = \sigma$ et

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{\ell_i} \frac{\partial_{i,j}^{\tau_{i,j}}}{\tau_{i,j}!} f(x) \neq 0.$$

Par la formule de Leibniz, cette définition est indépendante du choix de la trivialisation. Par ailleurs, elle ne dépend pas du choix des bases $\partial_{i,1}, \ldots, \partial_{i,\ell_i}$, $1 \leq i \leq m$. Si l'indice de s en x est supérieur ou égal à σ, alors pour tout $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\tau}_m) \in \mathbb{N}^{\ell_1} \times \cdots \times \mathbb{N}^{\ell_m}$ tel que $\sum_{i=1}^m \frac{|\boldsymbol{\tau}_i|}{d_i} = \sigma$, on pose

$$\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{\ell_i} \frac{\partial_{i,j}^{\tau_{i,j}}}{\tau_{i,j}!}$$

et $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} s(x) = \mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} f(x) \cdot s_0(x)$. Cette définition ne dépend pas du choix de la section s_0. En particulier, on définit ainsi une section locale $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} s \in \mathscr{O}_Y(\mathbf{d})_x$. Remarquons que contrairement à l'indice $\mathrm{ind}_x(s)$, la section locale $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} s$ dépend du choix de la base de dérivation.

REMARQUE 3.2.4. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, considérons un faisceau d'idéaux I_i de $\mathscr{O}_{Y_i}$. Supposons que I_i soit localement engendré par une fonction f_i au voisinage de x_i et que $f_i(x_i) \neq 0$. Alors pour tout $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\tau}_m) \in \mathbb{N}^{\ell_1} \times \cdots \times \mathbb{N}^{\ell_m}$, on a l'équivalence

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{\ell_i} \frac{\partial_{i,j}^{\tau_{i,j}}}{\tau_{i,j}!} f(x) \neq 0 \Longleftrightarrow \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{\ell_i} \left(f_i^{\tau_{i,j}}(x_i) \frac{\partial_{i,j}^{\tau_{i,j}}}{\tau_{i,j}!} f(x) \right) = \prod_{i=1}^{m} f_i^{|\boldsymbol{\tau}_i|}(x_i) \prod_{j=1}^{\ell_i} \frac{\partial_{i,j}^{\tau_{i,j}}}{\tau_{i,j}!} f(x) \neq 0.$$

Dans cette situation, on en déduit que l'on peut définir l'indice de s en x en remplaçant chacune des bases $\partial_{i,1}, \ldots, \partial_{i,\ell_i}$ par une base de $\mathrm{H}^0(Y_i, I_i \cdot \mathrm{Hom}(\Omega^1_{Y_i/K}, \mathscr{O}_{Y_i}))$.

Supposons que pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on dispose d'une bonne projection $\pi_i \colon Y_i \to \mathbb{P}_K^{\dim X_i}$ telle que $y_i := \pi(x_i) \notin V(G_i)$, où G_i désigne le polynôme associé à π_i. Fixons un entier $i \in \{1, \ldots, m\}$ et considérons une base $(\widetilde{\mathfrak{d}}_{i,1} \ldots \widetilde{\mathfrak{d}}_{i,\dim Y_i})$ de l'espace tangent $T_{\mathbb{P}^{\dim Y_i}, y_i}$. Le choix d'une trivialisation de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^{\dim Y_i}}(1)$ au voisinage de y_i permet d'identifier G_i à une fonction $G_{i|y_i}$ au voisinage de y_i, qui engendre localement l'idéal I_{G_i} de $V(G_i)$. Pour tout entier $1 \leq j \leq \dim Y_i$, posons $\mathfrak{d}_{i,j} = \pi^*(G_{i|y_i} \widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}) \in T_{Y_i, x_i}$. Remarquons que le faisceau de dérivations $\mathrm{Hom}(\Omega^1_{\mathbb{P}^{\dim Y_i}/K}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{\dim Y_i}})$ est engendré par ses sections globales (voir par exemple [**76**]). Ainsi, $G_{i|y_i} \widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j}$ se relève en une section globale de $I_{G_i} \cdot \mathrm{Hom}(\Omega^1_{\mathbb{P}^{\dim Y_i}/K}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{\dim Y_i}})$. D'après la remarque 3.2.3, $\mathfrak{d}_{i,j}$ se relève en une section globale de $\pi_i^{-1} I_{G_i} \cdot \mathrm{Hom}(\Omega^1_{Y_i/K}, \mathscr{O}_{Y_i})$. En utilisant la remarque 3.2.4, on en déduit que l'indice de s en x est le plus petit nombre rationnel σ tel qu'il existe un m-uplet $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\tau}_m) \in \mathbb{N}^{\ell_1} \times \cdots \times \mathbb{N}^{\ell_m}$ vérifiant

$$\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{\ell_i} \frac{\mathfrak{d}_{i,j}^{\tau_{i,j}}}{\tau_{i,j}!} f(x) = \prod_{i=1}^{m} G_{i|y_i}^{|\boldsymbol{\tau}_i|}(y_i) \prod_{j=1}^{\ell_i} \frac{(\pi^* \widetilde{\mathfrak{d}}_{i,j})^{\tau_{i,j}}}{\tau_{i,j}!} f(x) \neq 0$$

et $\sum_{i=1}^{m} \frac{|\boldsymbol{\tau}_i|}{d_i} = \sigma$.

Signalons que l'on ne peut pas choisir arbitrairement les bases $(\mathfrak{d}_{i,j})_{1 \leq j \leq \dim Y_i}$ dans le raisonnement précédent, car en général le faisceau des opérateurs différentiels sur Y_i n'est pas engendré par ses sections globales. Le raisonnement ci-dessus donne les détails implicites contenus dans la phrase « We multiply D by $G_1^{t_1} \cdots G_m^{t_m}$ and then the resulting differential operator $\widetilde{D}$ extends to X » de la démonstration originelle de Faltings et Wüstholz ([**26**, page 129]).

3.3. Théorème du produit de Faltings

Soient m, n des entiers strictement positifs. On note $\mathbb{P} = \mathbb{P}_K^n \times \cdots \times \mathbb{P}_K^n$ le produit de m copies de $\mathbb{P}_K^n$. Soit $X = X_1 \times_K \cdots \times_K X_m$ une sous-variété produit de $\mathbb{P}$ telle que X_i soit irréductible pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Soient $d_1, \ldots, d_m$ des entiers positifs et $f \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(d_1, \ldots, d_m))$. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème du produit de Faltings ([**24**, § 3]). Signalons que différentes versions effectives de ce théorème ont été démontrées par Evertse [**22**], Ferretti [**28**], et Rémond [**68**]. Comme l'ont expliqué Faltings et Wüstholz dans [**26**, § 2], on peut déduire de ce théorème une généralisation valable pour un produit de variétés projectives au moyen de bonnes projections. Nous aurons seulement besoin d'un corollaire (non effectif) d'une telle généralisation du théorème du produit. La version suivante est due à Vojta [**77**].

THÉORÈME 3.3.1 (Corollaire 18.3 de [**77**]). *Considérons un nombre réel $\epsilon > 0$. Il existe un nombre réel $r(\varepsilon) > 0$ ne dépendant que de ε, n, m vérifiant la propriété suivante. Supposons que*

$$d_i/d_{i+1} \geq r(\varepsilon), \quad \forall i \in \{1, \ldots, m-1\}$$

et que les degrés des variétés $X_1, \ldots, X_m$ sont majorés par un nombre réel c_2. Considérons un point $x \in (X_1 \times \cdots \times X_m)(K)$ tel que $\mathrm{ind}_x(f) \geq m\varepsilon$. *Alors il existe une constante $c_3 > 0$ ne dépendant que de n, m, ε, c_2 et il existe des sous-variétés géométriquement irréductibles*

$Z_i \subset X_i$, définies sur K, telles que $x \in Z_1 \times \cdots Z_m \subsetneq X_1 \times_K \cdots \times_K X_m$ et

$$\prod_{i=1}^{m} \deg Z_i \leq c_3, \quad i \in \{1, \ldots, m\},$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_i h(Z_i) \leq c_3 \left(\sum_{i=1}^{m} d_i (h(X_i) + 1) + h(f) \right).$$

Une version effective de ce théorème, où les nombres réels $r(\varepsilon)$, c_2 et c_3 sont explicites, a été démontrée par Ferretti (voir [**30**, proposition 5.6]).

3.4. Lemmes analytiques

Soit $\iota \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ une variété projective définie sur un corps de nombres K. Soit $\pi \colon X \to \mathbb{P}^{\dim X}_K$ une bonne projection et soit $G \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^{\dim X}_K, \mathscr{O}(M))$ le polynôme associé à π. Considérons des coordonnées homogènes $T_0, \ldots, T_{\dim X}$ sur $\mathbb{P}^{\dim X}_K$. Notons U_0 l'ouvert affine de $\mathbb{P}^{\dim X}_K$ des points $z \in \mathbb{P}^{\dim X}_K$ tels que $T_0(z) \neq 0$. Pour tout entier $j \in \{1, \ldots, \dim X\}$, on note $u_j = T_j / T_0 \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{\dim X}_K}(U_0)$ les coordonnées affines sur U_0. Notons également $G_{|U_0} = T_0^{-M} G \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{\dim X}_K}(U_0)$ et $V_0 = \pi^{-1}(U_0)$.

Fixons une base $\widetilde{\partial}_1, \ldots, \widetilde{\partial}_{\dim X}$ de $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^{\dim X}_K, \mathrm{Hom}(\Omega^1_{\mathbb{P}^X/K}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{\dim X}}))$. Pour tout entier $1 \leq j \leq \dim X$, posons

$$\partial_j := \pi^*(G \widetilde{\partial}_j)_{|U_0} \in \mathrm{H}^0(V_0, \mathrm{Hom}(\Omega^1_{X/K}, \mathscr{O}_X)).$$

Si $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_{\dim X}) \in \mathbb{N}^{\dim X}$, on note

$$\widetilde{\mathscr{D}}^{\boldsymbol{\tau}} := \prod_{j=1}^{\dim X} \frac{\widetilde{\partial}_j^{\tau_j}}{\tau_j!} \quad \text{et} \quad \mathscr{D}^{\boldsymbol{\tau}} := \prod_{j=1}^{\dim X} \frac{\partial_j^{\tau_j}}{\tau_j!} = (\pi^{-1} G_{|U_0})^{|\boldsymbol{\tau}|} \prod_{j=1}^{\dim X} \frac{(\pi^* \widetilde{\partial}_j)^{\tau_j}}{\tau_j!}.$$

Le lemme suivant peut s'interpréter comme un analogue de l'inégalité de Cauchy pour les sections de $\mathscr{O}_X(d)$, $d \in \mathbb{N}$. Rappelons que si v est une place de K, on a noté $a(v) = 1$ si v est archimédienne, $a(v) = 0$ sinon.

Lemme 3.4.1. *Soient v une place de K, d un entier naturel non nul, et $\varepsilon' > 0$ un nombre réel. Il existe une trivialisation $(V_0, s_{\varepsilon'})$ de $\mathscr{O}_X(d)$ sur V_0 satisfaisant la propriété suivante. Soit $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}(d))$. Alors pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{\dim X}$ et pour toute place v de K, on a*

$$\forall\ y \in V_0(\mathbb{C}_v), \quad |\mathscr{D}^{\boldsymbol{\tau}} f(y)|_v \|s_{\varepsilon'}(y)\|_v \leq (1 + \varepsilon') c_4^{a(v)} \|G\|_{v,\sup}^{|\boldsymbol{\tau}|} \sup_{z \in V_0(\mathbb{C}_v)} \|s(z)\|_v,$$

où $s_{|V_0} = f \cdot s_{\varepsilon'}$ et $c_4 > 0$ est une constante ne dépendant que de n.

Démonstration : Considérons un point $y \in V_0(\mathbb{C}_v)$ et notons $\widetilde{y} = \pi(y)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\widetilde{y} \notin V(G)$ (car sinon $\mathscr{D}^{\boldsymbol{\tau}} f(y) = 0$). Posons

$$\delta_{y,v} = \inf\{ |(u_k(z) - u_k(\widetilde{y}))_k|_{2,v} \mid z \in (V(G_{|U_0}))(\mathbb{C}_v) \subset U_0(\mathbb{C}_v) \}$$

et

$$\Delta_{y,v} = \{ z \in U_0(\mathbb{C}_v) \mid \max_{1 \leq k \leq \dim X} |u_k(z) - u_k(\widetilde{y})|_v < \delta_{y,v} \}.$$

D'après [**26**, page 125] (voir aussi [**29**, proposition 5.1]), il existe une constante c telle que

$$\delta_{y,v} \geq c^{a(v)} \frac{|G_{|U_0}(\widetilde{y})|_v}{\|G\|_{v,\sup}}.$$

Le morphisme π est étale au voisinage de y et il existe une section ζ de π définie sur $\Delta_{y,v}$. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel suffisamment petit pour que $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} < (1 + \varepsilon')$. Nous allons montrer qu'il existe une section $s_{\varepsilon'}$ de $\mathscr{O}_X(d)$, définie et ne s'annulant pas sur V_0, vérifiant

$$\forall\ z \in (V_0 \setminus \pi^{-1} V(G_{|U_0}))(\mathbb{C}_v),\ 1 - \varepsilon \leq \|s_{\varepsilon'}(z)\|_v \leq 1 + \varepsilon. \tag{22}$$

Soit $s_0 \in \mathrm{H}^0(V_0, \mathscr{O}(d))$ une section ne s'annulant pas. Pour tout $z \in (V_0 \setminus \pi^{-1}V(G_{|U_0}))(\mathbb{C}_v)$, considérons un élément $b_v(z) \in \mathbb{C}_v$ tel que $|b_v(z)|_v = \|s_0(z)\|_v^{-1}$. On considère l'application continue

$$\begin{array}{rccc} \varphi_v\colon & (V_0 \setminus \pi^{-1}V(G_{|U_0}))(\mathbb{C}_v) & \to & \mathbb{C}_v \\ & z & \mapsto & b_v(z). \end{array}$$

Si v est ultramétrique, il existe un polynôme P tel que pour tout $z \in (V_0 \setminus \pi^{-1}V(G_{|U_0}))(\mathbb{C}_v)$, on ait $|P(z) - \varphi_v(z)|_v < \varepsilon/\|s_0\|_{v,\sup}$ d'après le théorème d'interpolation de [**15**]. Considérons la section $s_{\varepsilon'} = P \cdot s_0$. Alors pour tout $z \in (V_0 \setminus \pi^{-1}V(G_{|U_0}))(\mathbb{C}_v)$, on a

$$\|s_{\varepsilon'}(z)\|_v = \|s_0(z)\|_v |P(z)|_v \leq \|s_0(z)\|_v |\varphi_v(z)|_v + \varepsilon = 1 + \varepsilon.$$

De même, on a $\|s_{\varepsilon'}(z)\|_v \geq 1 - \varepsilon$. Ainsi, pour tout $z \in (V_0 \setminus \pi^{-1}V(G_{|U_0}))(\mathbb{C}_v)$, on a

$$1 - \varepsilon \leq \|s_{\varepsilon'}(z)\|_v \leq 1 + \varepsilon.$$

Dans le cas archimédien, on procède de la même manière en appliquant le théorème de Stone-Weierstrass à $\varphi_v\colon B(\rho, \varphi) \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \|s_0(z)\|_v^{-1}$. L'inégalité (22) est en particulier vraie pour tout point $z \in \zeta(\Delta_{y,v})$. Il existe une fonction f sur $\zeta(\Delta_{y,v})$ telle que $s_{|\zeta(\Delta_{y,v})} = f \cdot s_{\varepsilon'}$. Posons $\widetilde{f} = \zeta^* f$. Notons $R := \sup_{z \in \Delta_{y,v}} |\widetilde{f}(z)|_v \leq (1-\varepsilon)^{-1} \sup_{z \in V_0(\mathbb{C}_v)} \|s(z)\|_v$. D'après l'inégalité de Cauchy en plusieurs variables (voir [**77**, lemme 15.1] pour le cas ultramétrique), on a

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} f(y)|_v \|s_{\varepsilon'}(y)\|_v &= |G_{|U_0}(\widetilde{y})|_v^{|\boldsymbol{\tau}|} \|s_{\varepsilon'}(y)\|_v |\widetilde{D}^{\boldsymbol{\tau}} \widetilde{f}(\widetilde{y})|_v \\ &\leq |G_{|U_0}(\widetilde{y})|_v^{|\boldsymbol{\tau}|} (1+\varepsilon) \frac{R}{\delta_{y,v}^{|\boldsymbol{\tau}|}} \\ &\leq \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \sup_{z \in V_0(\mathbb{C}_v)} \|s(z)\|_v \left(\frac{|G_{|U_0}(\widetilde{y})|_v}{\delta_{y,v}}\right)^{|\boldsymbol{\tau}|} \\ &\leq \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) c^{a(v)} \sup_{z \in V_0(\mathbb{C}_v)} \|s(z)\|_v \|G\|_{v,\sup}^{|\boldsymbol{\tau}|} \\ &\leq (1+\varepsilon') c^{a(v)} \sup_{z \in V_0(\mathbb{C}_v)} \|s(z)\|_v \|G\|_{v,\sup}^{|\boldsymbol{\tau}|}. \end{aligned}$$

□

Pour tout entier ℓ, pour tout $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ et pour tout $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on note

$$I_{\boldsymbol{\tau}}(b) \quad = \quad \{(\mathbf{j}_1, \ldots, \mathbf{j}_b) \in (\mathbb{N}^\ell)^b \mid \mathbf{j}_{1,i} + \ldots + \mathbf{j}_{b,i} = \tau_i, \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, \ell\}\}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} \operatorname{card} I_{\boldsymbol{\tau}}(b) &= \operatorname{card}\{\mathbf{j} = (\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_\ell) \in (\mathbb{N}^b)^\ell \mid |\mathbf{t}_i| = \tau_i, \quad i \in \{1, \ldots, \ell\}\} \\ &= \prod_{i=1}^{\ell} \binom{b-1+\tau_i}{b-1} \leq 2^{(b-1)\ell + |\boldsymbol{\tau}|}. \end{aligned}$$

Nous aurons besoin du résultat suivant, qui est une conséquence du lemme 7.2 de [**26**].

LEMME 3.4.2. *Soit v une place de K et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ des entiers naturels. Posons $d = \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k$. Pour tout nombre réel $\varepsilon' > 0$, il existe une trivialisation $(V_0, s_{\varepsilon'})$ de $\mathscr{O}_X(1)$ sur V_0 satisfaisant la propriété suivante. Soient $s_1, \ldots s_\ell$ des sections de $\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(1))$ et soit $s = s_1^{\lambda_1} \cdots s_\ell^{\lambda_\ell} \in S^d\,\mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(1)) \subset \mathrm{H}^0(X, \mathscr{O}_X(d))$. Alors pour tous $y \in X(\mathbb{C}_v)$, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{\dim X}$, $v \in \Sigma_K$, on a*

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} f(y)|_v \|s_{\varepsilon'}(y)\|_v^d \leq (1+\varepsilon') c_5^{a(v)((b-1)\ell + |\boldsymbol{\tau}|)} \|G\|_{v,\sup}^{|\boldsymbol{\tau}|} \prod_{k=1}^{\ell} \|s_k\|_{v,\sup}^{\lambda_k} \\ \times \max_{\mathbf{j} \in I_{\boldsymbol{\tau}}(b)} \prod_{k=1}^{\ell} \|s_k(y)\|_v^{\max(\lambda_k - |\mathbf{j}_k|, 0)}, \end{aligned}$$

où $s_{k|V_0} = f_k \cdot s_{\varepsilon'}$, $f = f_1^{\lambda_1} \cdots f_\ell^{\lambda_\ell}$ et c_5 est une constante ne dépendant que de n.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$ un nombre réel et soit $y \in X(\mathbb{C}_v)$. On peut supposer que $\widetilde{y} = \pi(y) \notin V(G)$ car sinon $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} f(y) = 0$. En reprenant les notations et le raisonnement de la démonstration du lemme 3.4.1, on dispose d'une trivialisation (V_0, s_ε) de $\mathscr{O}_X(1)$ sur V_0 telle que

$$\forall\, z \in \pi^{-1}(\Delta_{y,v}),\ 1 - \varepsilon \leq \|s_\varepsilon(z)\|_v \leq 1 + \varepsilon$$

et d'une section ζ de π définie sur $\Delta_{y,v}$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, \ell\}$, on pose $\widetilde{f}_k = \zeta^* f_k$ et $R_k = \sup_{z \in \Delta_{y,v}} |\widetilde{f}_k(z)|_v \leq (1 + \varepsilon)\|s_k\|_{v,\sup}$. D'après le lemme 7.2 de [**26**] (voir aussi [**29**, proposition 5.2]), on a

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} f_1^{\lambda_1} \cdots f_\ell^{\lambda_\ell}(y)\right|_v &= |G_{|U_0}(\widetilde{y})|_v^{\boldsymbol{\tau}} \left|\widetilde{D}^{\boldsymbol{\tau}} \widetilde{f}_1^{\lambda_1} \cdots \widetilde{f}_\ell^{\lambda_\ell}(\widetilde{y})\right|_v \\
&\leq 2^{a(v)((b-1)\ell + |\boldsymbol{\tau}|)} \prod_{k=1}^{\ell} R_k^{\lambda_k} \left(\frac{|G_{|U_0}(\widetilde{y})|_v}{\delta_{y,v}}\right)^{\boldsymbol{\tau}} \max_{\mathbf{j} \in I_{\boldsymbol{\tau}(b)}} \prod_{k=1}^{\ell} \|\widetilde{f}_k(\widetilde{y})\|_v^{\max(\lambda_k - |\mathbf{j}_k|, 0)} \\
&\leq c^{a(v)((b-1)\ell + |\boldsymbol{\tau}|)} \prod_{k=1}^{\ell} \|s_k\|_{v,\sup}^{\lambda_k} \|G\|_{v,\sup}^{\boldsymbol{\tau}} \max_{\mathbf{j} \in I_{\boldsymbol{\tau}(b)}} \prod_{k=1}^{\ell} \|s_k(y)\|_v^{\max(\lambda_k - |\mathbf{j}_k|, 0)} \\
&\quad \times \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^d,
\end{aligned}$$

où c est une constante ne dépendant que de n. Par ailleurs, $|\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} f(y)|_v \|s_\varepsilon(y)\|_v^d \leq (1 + \varepsilon)^d \left|\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} f_1^{\lambda_1} \cdots f_\ell^{\lambda_\ell}(y)\right|_v$, donc le lemme est démontré pourvu que ε soit choisi de sorte que $(1+\varepsilon)^{2d}/(1-\varepsilon)^d < 1 + \varepsilon'$.

□

3.5. Constructions préliminaires

3.5.1. Sous-variétés et filtrations induites. Soit m un entier naturel non nul. On désigne par $X_L^{(m)} = X_L \times_L \cdots \times_L X_L$ le produit fibré de m copies de $X_L := X \times_K \operatorname{Spec}(L)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, notons $\operatorname{pr}_i \colon X_L^{(m)} \to X_L$ la i-ème projection. Soit $Y = Y_1 \times_L \cdots \times_L Y_m$ une sous-variété produit de $X_L^{(m)}$ (i.e. pour tout $1 \leq i \leq m$, Y_i et une sous-variété de X_L, définie sur L). Si $Y_i \neq X_L$, on suppose dans la suite que Y_i est irréductible. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $\Gamma_k(Y_i) = \mathrm{H}^0(Y_i, \mathscr{O}_{Y_i}(k))$ et considérons l'algèbre graduée

$$\Gamma_\bullet(Y_i) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_k(Y_i).$$

Fixons un m-uplet d'entiers naturels $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m)$ et notons $\Gamma_{\mathbf{d}}(Y) = \mathrm{H}^0(Y, \mathscr{O}_Y(\mathbf{d})) = \Gamma_{d_1}(Y_1) \otimes_L \cdots \otimes_L \Gamma_{d_m}(Y_m)$.

Soit w une place de l'ensemble $\mathscr{P}$. Si k est suffisamment grand et divisible, alors $\Gamma_k(Y_i)$ est un quotient de $\mathrm{H}^0(X_L, \mathscr{O}_{X_L}(k)) = S^k V$ (rappelons que $V = \Gamma_1(X) = \mathrm{H}^0(X_L, \mathscr{O}_{X_L}(1))$). La filtration $(V, \mathscr{F}_w)$ de V induit une filtration sur l'espace vectoriel $S^k V$, qui induit à son tour une filtration $(\Gamma_k(Y_i), \mathscr{F}_w)$ sur $\Gamma_k(Y_i)$ par quotient. Nous noterons $\mu_w(\Gamma_k(Y_i))$ la pente de cette filtration. On dispose d'une variable aléatoire associée à la filtration $(\Gamma_k(Y_i), \mathscr{F}_w)$, que l'on note $Z_{k,w}(Y_i)$, qui vérifie

$$\mathbb{E}_{i,k,w}(Y) := \mathbb{E}(Z_{k,w}(Y_i)/k) = \frac{1}{k}\mathbb{E}(Z_{k,w}(Y_i)) = \frac{1}{k}\mu_w(\Gamma_k(Y_i))$$

(voir le paragraphe 1.6.1). Supposons que d_i est suffisamment grand et notons $\rho_{i,d_i,w}$ la mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ associée à la variable aléatoire $Z_{d_i,w}(Y_i)/d_i$: pour tout nombre réel t, on a

$$\rho_{i,d_i,w}([t, +\infty[) = \mathbb{P}(Z_{d_i,w}(Y_i)/d_i \geq t) = \frac{\dim \mathscr{F}_w^{td_i} \Gamma_{d_i}(Y_i)}{\dim \Gamma_{d_i}(Y_i)}.$$

Notons également $\mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(Y) := \sum_{i=1}^m \mathbb{E}_{i,d_i,w}(Y)$. On définit une filtration de $\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)$ en considérant, pour tout nombre réel t, l'espace vectoriel

$$\mathscr{F}_w^t \Gamma_{\mathbf{d}}(Y) = \sum_{\substack{(t_1,\ldots,t_m)\in\mathbb{R}^m \\ t_1+\cdots+t_m\geq t}} \mathrm{Vect}\left\{ s_1 \otimes \cdots \otimes s_m \mid s_i \in \mathscr{F}_w^{t_i d_i} \Gamma_{i,d_i}(Y_i) \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\} \right\}.$$

Concrètement, si $(s_{w,0},\ldots,s_{w,\dim V})$ est une base de V adaptée à la filtration $(V,\mathscr{F}_w)$, toute section $s \in \mathscr{F}_w^t\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)$ s'écrit sous la forme

$$s = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} a_{\boldsymbol{\lambda}} \bigotimes_{i=1}^m \prod_{j=1}^{\dim V} \mathrm{pr}_i^*({s_{w,j}}^{\lambda_{i,j}})_{|Y_i},$$

où $\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_{i,j})_{i,j} \in (\mathbb{N}^{\dim V})^m \mid \forall i \in \{1,\ldots,m\},\ \sum_{j=1}^{\dim V} \lambda_{i,j} = d_i\}$, et pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ tel que $a_{\boldsymbol{\lambda}} \in L$ est non nul, on a

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{\dim V} \frac{\lambda_{i,j}\,\mathrm{ord}_w(s_{w,j})}{d_i} \geq t.$$

Considérons la mesure de probabilité

$$\rho_{\mathbf{d},w} = \rho_{1,d_1,w} * \cdots * \rho_{m,d_m,w}$$

définie comme le produit de convolution des mesures de probabilité $\rho_{i,d_i,w}$, $1 \leq i \leq m$. C'est la mesure de probabilité associée à la variable aléatoire $Z_{d_1,w}(Y_1)/d_1 + \cdots + Z_{d_m,w}(Y_m)/d_m$ (remarquons que les variables aléatoires $Z_{d_i,w}(Y_i)/d_i$, $1 \leq i \leq m$, sont indépendantes). La définition de la filtration $(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y),\mathscr{F}_w)$ entraîne l'égalité

$$\rho_{\mathbf{d},w}([t,+\infty[) = \frac{\dim \mathscr{F}_w^t\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)}{\dim \Gamma_{\mathbf{d}}(Y)}$$

pour tout nombre réel t.

3.5.2. Espace vectoriel des sections auxiliaires. Conservons les notations introduites précédemment. L'objet de ce paragraphe est de définir un sous-espace vectoriel $W_{\mathbf{d}}(Y)$ de $\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)$ dans lequel nous construirons une section auxiliaire. Supposons que l'inégalité $[L:\mathbb{Q}] < \sum_{w\in\mathscr{P}} \mu_w(V)$ soit vérifiée et fixons un nombre réel δ tel que

$$0 < \delta < \sum_{w\in\mathscr{P}} \mu_w(V) - [L:\mathbb{Q}].$$

Pour toute place $w \in \mathscr{P}$, posons $V_{w,\mathbf{d}}(Y) = \mathscr{F}_w^{\mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(Y)-m\delta}\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)$ et considérons le sous-espace vectoriel $W_{\mathbf{d}}(Y)$ de $\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)$ défini par $W_{\mathbf{d}}(Y) = \bigcap_{w\in\mathscr{P}} V_{w,\mathbf{d}}(Y)$. Nous cherchons maintenant à minorer le quotient $\dim W_{\mathbf{d}}(Y)/\dim\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)$. Fixons une place $w \in \mathscr{P}$ et notons

$$I_{w,\delta,\mathbf{d}} := \int_{t<\mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(Y)-m\delta} d\rho_{\mathbf{d},w}(t) = 1 - \rho_{\mathbf{d},w}([\mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(Y)-m\delta,+\infty[).$$

On a ainsi $\dim V_{w,\mathbf{d}}(Y) = (1 - I_{w,\delta,\mathbf{d}})\dim\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)$.

LEMME 3.5.1. *Supposons que $\delta \leq c_{w,e_w}/2$. L'inégalité suivante est vérifiée :*

$$I_{w,\delta,\mathbf{d}} \leq \exp\left(-\frac{3m\delta^2}{4c_{w,e_w}^2}\right).$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} I_{w,\delta,\mathbf{d}} &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_{\{\sum_i \mathbb{E}_{i,d_i,w}(Y)-m\delta>t_1+\cdots+t_m\}} d\rho_{1,d_1,w}(t_1)\cdots d\rho_{m,d_m,w}(t_m) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathbb{1}_{\{\exp(\frac{\delta}{c_{w,e_w}^2}\sum_i(\mathbb{E}_{i,d_i,w}(Y)-t_i))>\exp(\frac{m\delta^2}{c_{w,e_w}^2})\}} d\rho_{1,d_1,w}(t_1)\cdots d\rho_{m,d_m,w}(t_m). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
& I_{w,\delta,\mathbf{d}} \exp\left(\frac{m\delta^2}{c_{w,e_w}^2}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left(\frac{m\delta^2}{c_{w,e_w}^2}\right) \mathbb{1}_{\{\exp(\frac{\delta}{c_{w,e_w}^2}\sum_i(\mathbb{E}_{i,d_i,w}(Y)-t_i))>\exp\left(\frac{m\delta^2}{c_{w,e_w}^2}\right)\}} d\rho_{1,d_1,w}(t_1)\cdots d\rho_{m,d_m,w}(t_m) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left(\frac{\delta}{c_{w,e_w}^2}\sum_i(\mathbb{E}_{i,d_i,w}(Y)-t_i)\right) d\rho_{1,d_1,w}(t_1)\cdots d\rho_{m,d_m,w}(t_m) \\
&= \prod_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{\delta}{c_{w,e_w}^2}(\mathbb{E}(Z_{d_i,w}(Y_i)/d_i)-t_i)\right) d\rho_{i,d_i,w}(t_i).
\end{aligned}
$$

Par ailleurs, on a presque sûrement l'encadrement

$$
0 \leq Z_{d_i,w}(Y_i)/d_i \leq c_{w,e_w}. \tag{23}
$$

En utilisant l'hypothèse faite sur δ, on en déduit que

$$
|\mathbb{E}(Z_{d_i,w}(Y_i)/d_i) - Z_{d_i,w}/d_i| \leq 2c_{w,e_w} \leq \frac{c_{w,e_w}^2}{\delta} \quad \text{p.s.}
$$

Remarquons que $\exp(x) \leq 1 + x + x^2$ si $|x| \leq 1$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on a donc

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{\delta}{c_{w,e_w}^2}(\mathbb{E}(Z_{d_i,w}(Y_i)/d_i)-t_i)\right) d\rho_{i,d_i,w} \\
&\leq 1 + \frac{\delta}{c_{w,e_w}^2}\int_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}(Z_{d_i,w}(Y_i)/d_i)-t_i)d\rho_{i,d_i,w} + \frac{\delta^2}{c_{w,e_w}^4}\int_{\mathbb{R}}(\mathbb{E}(Z_{d_i,,w}(Y_i)/d_i)-t_i)^2 d\rho_{i,d_i,w} \\
&= 1 + \frac{\delta^2}{c_{w,e_w}^4}\operatorname{Var}(Z_{d_i,w}(Y_i)/d_i).
\end{aligned}
$$

D'après (23), on a également $\operatorname{Var}(Z_{d_i,w}(Y_i)/d_i) \leq \frac{c_{w,e_w}^2}{4}$ (voir la remarque 3.5.2 ci-dessous). On en déduit que

$$
\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{\delta}{c_{w,e_w}^2}(\mathbb{E}(Z_{d_i,w}(Y_i)/d_i)-t_i)\right) d\rho_{i,d_i,w} \leq 1 + \frac{\delta^2}{4c_{w,e_w}^2}.
$$

On a finalement

$$
I_{w,\delta,\mathbf{d}} \leq \exp\left(-\frac{m\delta^2}{c_{w,e_w}^2}\right)\left(1+\frac{\delta^2}{4c_{w,e_w}^2}\right)^m \leq \exp\left(-\frac{m\delta^2}{c_{w,e_w}^2}\right)\exp\left(\frac{m\delta^2}{4c_{w,e_w}^2}\right) \leq \exp(\frac{-3m\delta^2}{4c_{w,e_w}^2}),
$$

ce qui achève la preuve.

□

REMARQUE 3.5.2. Dans la démonstration, nous avons utilisé la propriété suivante : si Z est une variable aléatoire vérifiant presque sûrement l'encadrement $0 \leq Z \leq a$ avec a un nombre réel, alors la majoration $\operatorname{Var}(Z) \leq a^2/4$ est satisfaite. En effet, on a dans ce cas

$$
\begin{aligned}
\frac{a^2}{4} - \operatorname{Var}(Z) &= \frac{a^2}{4} + \mathbb{E}(Z)^2 - \mathbb{E}(Z^2) \\
&= \left(\frac{a}{2} - \mathbb{E}(Z)\right)^2 + a\mathbb{E}(Z) - \mathbb{E}(Z^2) \\
&= \left(\frac{a}{2} - \mathbb{E}(Z)\right)^2 + \mathbb{E}(Z(a-Z)) \geq 0.
\end{aligned}
$$

REMARQUE 3.5.3. Dans l'article [**26**], Faltings et Wüstholz utilisent également un argument probabiliste majorer une quantité analogue à $I_{w,\delta,\mathbf{d}}$, qui repose sur la loi des grands nombres. Comme les variables aléatoires $Z_{d_i,w}(Y_i)/d_i$, $1 \leq i \leq m$, sont indépendantes, le nombre réel

$$\mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(Y) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}_{i,d_i,w}(Y) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}(Z_{d_i,w}(Y_i)/d_i)$$

est l'espérance de la variable aléatoire $Z_{\mathbf{d},w(Y)} := Z_{d_1,w}(Y_1)/d_1 + \cdots + Z_{d_m,w}(Y_m)/d_m$, et l'on a

$$\mathrm{Var}(Z_{\mathbf{d},w}(Y)) = \mathrm{Var}(Z_{d_1,w}(Y_1)/d_1) + \cdots + \mathrm{Var}(Z_{d_m,w}(Y_m)/d_m) \leq \frac{mc_{w,e_w}^2}{4}.$$

En appliquant la loi des grands nombres, on obtient que

$$\begin{aligned} I_{w,\delta,\mathbf{d}} = \mathbb{P}(\mathbb{E}(Z_{\mathbf{d},w(Y)}) - Z_{\mathbf{d},w}(Y) > m\delta) &\leq \mathbb{P}(|\mathbb{E}(Z_{\mathbf{d},w(Y)}) - Z_{\mathbf{d},w}(Y)| > m\delta) \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}(Z_{\mathbf{d},w}(Y))}{(m\delta)^2} \\ &\leq \frac{c_{w,e_w}^2}{4m\delta^2}. \end{aligned}$$

Cet argument est celui utilisé dans la preuve originelle de Faltings et Wüstholz (voir [**26**, §5]). Nous aurions pu nous contenter de cette majoration pour démontrer le théorème 3.1.1 (et donc le théorème 2.0.1). Cependant, l'amélioration donnée par le lemme 3.5.1 nous conduira à un énoncé plus précis au paragraphe 3.7.

PROPOSITION 3.5.4. *Supposons que $\delta \leq c_{w,e_w}/2$ pour toute place $w \in \mathscr{P}$. Alors*

$$\dim W_{\mathbf{d}}(Y) \geq \left(1 - \mathrm{card}(\mathscr{P}) \exp\left(\frac{-3m\delta^2}{4 \max_{w\in\mathscr{P}} c_{w,e_w}^2}\right)\right) \dim \Gamma_{\mathbf{d}}(Y).$$

Démonstration : Par la formule de Grassmann et un raisonnement par récurrence, on montre que si $F_1, \cdots F_n$ sont des sous-espaces vectoriels d'un espace E vérifiant $\dim F_i \geq (1-\lambda_i)\dim E$ pour $i \in \{0, \cdots, n\}$, alors

$$\dim(\bigcap F_i) \geq (1 - \sum \lambda_i) \dim E.$$

Le lemme 3.5.1 implique alors l'inégalité recherchée.

□

3.5.3. Structure de fibré adélique sur $\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)$ et minoration de $\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y))$. Soit $i \in \{1, \ldots, m\}$. Nous munissons le L-espace vectoriel $\Gamma_{d_i}(Y)$ d'une structure de fibré adélique en considérant la norme $\|.\|_{v,\sup}$ sur $\Gamma_{d_i}(Y_i) \otimes_L \mathbb{C}_v$ pour toute place $v \in \Sigma_L$. On considère la structure de fibré adélique induite par produit tensoriel sur $\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)$. Le fibré adélique ainsi défini est pur (voir la remarque 1.3.9 page 39). Rappelons que $W_{\mathbf{d}}(Y) = \bigcap_{w\in\mathscr{P}} V_{w,\mathbf{d}}(Y)$. L'objet de ce paragraphe est d'établir une minoration de la pente de $W_{\mathbf{d}}(Y)$ de la forme

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y)) \geq c_6(d_1 + \cdots + d_m),$$

où c_6 est une constante indépendante de $\mathbf{d}$.

Étape 1. Nous allons commencer par minorer $\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(V_{w,\mathbf{d}}(Y))$ pour une place $w \in \mathscr{P}$ fixée. Considérons une base $(s_{w,1}, \ldots, s_{w,\dim V})$ de V adaptée à la filtration $(V, \mathscr{F}_w)$. On fixe une base $(g_1, \ldots, g_{\dim V_{w,\mathbf{d}}(Y)})$ de $V_{w,\mathbf{d}}(Y)$ formée de vecteurs de la forme

$$\bigotimes_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{\dim V} \mathrm{pr}_i^*({s_{w,j}}^{\lambda_{i,j}})_{|Y_i} \right)$$

avec $\sum_{j=1}^{\dim V} \lambda_{i,j} = d_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. D'après la proposition 1.1.12 de la page 31 et la majoration grossière

$$\log(2 \dim V_{w,\mathbf{d}}(Y)) \leq 2 \sum_{i=1}^{m} \log(\dim V^{\otimes d_i}) = 2 \log(\dim V)(d_1 + \cdots + d_m),$$

on a

$$\begin{aligned}
-\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(V_{w,\mathbf{d}}(Y)) &\leq \sum_{k=1}^{\dim V_{w,\mathbf{d}}(Y)} h(g_k) + \frac{1}{2}\dim(V_{w,\mathbf{d}}(Y))\log(2\dim(V_{w,\mathbf{d}}(Y))) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\dim V_{w,\mathbf{d}}(Y)} \sum_{i=1}^{m} d_i \max_{1\leq j\leq \dim V}\{0, h(s_{w,j})\} \\
&\qquad + \log(\dim V)\dim(V_{w,\mathbf{d}}(Y))(d_1+\cdots+d_m) \\
&\leq (d_1+\cdots+d_m)\dim V_{w,\mathbf{d}}(Y)\left(\max_{1\leq j\leq \dim V}\{0, h(s_{w,j})\} + \log(\dim V)\right).
\end{aligned}$$

En notant $\kappa_w = \max_{1\leq i\leq m}\max_{1\leq j\leq \dim V}\{0, h(s_{w,j})\}) + \log(\dim V) \geq 0$ on obtient

$$\begin{aligned}
\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(V_{w,\mathbf{d}}(Y)) &\geq -\kappa_w \dim(V_{w,\mathbf{d}}(Y))(d_1+\ldots+d_m) \\
&\geq -\kappa_w \dim(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y))(d_1+\cdots+d_m).
\end{aligned}$$

La constante κ_w est indépendante de $\mathbf{d}$.

Étape 2. Nous allons maintenant majorer la pente maximale $\widehat{\mu}_{\max}(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y))$. D'après la proposition 1.1.20 page 33, on a

$$\widehat{\mu}_{\max}(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)) \leq \sum_{i=1}^{m}\widehat{\mu}_{\max}(\Gamma_{d_i}(Y_i)) + \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{m}\log(\dim\Gamma_{d_i}(Y_i)).$$

D'après la proposition 1.1.16 page 32 et le lemme 1.5.7 page 42, il existe une constante c telle que pour tout entier $1\leq i\leq m$, on ait

$$\widehat{\mu}_{\max}(\Gamma_{d_i}(Y_i)) \leq -\lambda_1(\Gamma_{d_i}(Y_i)) + cd_i \leq h_{\mathscr{O}(d_i)}(Y_i) + cd_i = d_i h(Y_i) + cd_i.$$

On en déduit qu'il existe une constante $c_7 \geq 0$ ne dépendant que de n telle que

$$\widehat{\mu}_{\max}(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)) \leq \sum_{i=1}^{m}(c_7 + h(Y_i))d_i.$$

Étape 3. Nous allons maintenant raisonner par récurrence sur le cardinal de $\mathscr{P}$ pour montrer la propriété suivante : il existe une constante $\tau_{\mathrm{card}(\mathscr{P})}$ positive et indépendante de $d_1,\ldots,d_m$ telle que

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y)) \geq -\dim(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y))\sum_{i=1}^{m}(\tau_{\mathrm{card}(\mathscr{P})} + \mathrm{card}(\mathscr{P})h(Y_i))d_i.$$

Supposons d'abord que $\mathrm{card}(\mathscr{P}) = 2$. D'après la proposition 1.1.10 de la page 30, on a :

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\sum_{w\in\mathscr{P}} V_{w,\mathbf{d}}(Y)) + \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y)) \geq \sum_{w\in\mathscr{P}}\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(V_{w,\mathbf{d}}(Y)) - \frac{1}{2}\dim\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)\log(2\dim\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
&\dim(\sum_{w\in\mathscr{P}} V_{w,\mathbf{d}}(Y))\widehat{\mu}_{\max}(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)) + \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y)) \\
&\qquad\geq \dim(\sum_{w\in\mathscr{P}} V_{w,\mathbf{d}}(Y))\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\sum_{w\in\mathscr{P}} V_{w,\mathbf{d}}(Y)) + \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y)) \\
&\qquad\geq \sum_{w\in\mathscr{P}}\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(V_{w,\mathbf{d}}(Y)) - \frac{1}{2}\dim\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)\log(2\dim\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)).
\end{aligned}$$

En remarquant que $\log(2\dim\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)) \le \sum_{i=1}^m 2\log(\dim V^{\otimes d_i}) = 2\log(\dim V)(d_1+\cdots+d_m)$ et en notant $\kappa_1 = \sum_{w\in\mathscr{P}}\kappa_w + \log(\dim V)$, on obtient d'après l' étape 1 :

$$\begin{aligned}\dim(\sum_{w\in\mathscr{P}} V_{w,\mathbf{d}}(Y))\widehat{\mu}_{\max}(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)) + \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y)) \ge -\sum_{w\in\mathscr{P}}\kappa_w \dim(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y))(d_1+\ldots+d_m)\\ -\frac{1}{2}\dim\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)\log(2\dim\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)),\end{aligned}$$

puis

$$\dim(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y))\widehat{\mu}_{\max}(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)) + \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y)) \ge -\kappa_1 \dim(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y))(d_1+\ldots+d_m).$$

D'après l'étape 2, on en déduit que

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y)) \ge -\dim(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y))\sum_{i=1}^m(\kappa_1 + c_7 + h(Y_i))d_i.$$

Passons maintenant au cas général. On suppose le cardinal de $\mathscr{P}$ quelconque et on fixe une place w_0 dans $\mathscr{P}$. D'après la proposition 1.1.10, on a

$$\begin{aligned}&\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}\left(V_{w_0,\mathbf{d}}(Y) + \bigcap_{w\neq w_0} V_{w,\mathbf{d}}(Y)\right) + \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y))\\ &\quad\ge \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(V_{w_0,\mathbf{d}}(Y)) + \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}\left(\bigcap_{w\neq w_0} V_{w,\mathbf{d}}(Y)\right) - \dim(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y))\log(\dim V)(d_1+\cdots+d_m),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\dim\left(V_{w_0,\mathbf{d}}(Y) + \bigcap_{w\neq w_0} V_{w,\mathbf{d}}(Y)\right)\widehat{\mu}_{\max}(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)) + \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y))\\ &\quad\ge \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(V_{w_0,\mathbf{d}}(Y)) + \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}\left(\bigcap_{w\neq w_0} V_{w,\mathbf{d}}(Y)\right) - \dim(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y))\log(\dim V)(d_1+\cdots+d_m).\end{aligned}$$

D'après l' étape 1, on a donc

$$\begin{aligned}&\dim\left(V_{w_0,\mathbf{d}}(Y) + \bigcap_{w\neq w_0} V_{w,\mathbf{d}}(Y)\right)\widehat{\mu}_{\max}(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)) + \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y))\\ &\qquad\ge -(\kappa_{w_0} + \log(\dim V))\dim(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y))(d_1+\cdots+d_m) + \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}\left(\bigcap_{w\neq w_0} V_{w,\mathbf{d}}(Y)\right).\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}\left(\bigcap_{w\neq w_0} V_{w,\mathbf{d}}(Y)\right) \ge -\dim(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y))\sum_{i=1}^m(\tau_{\mathrm{card}(\mathscr{P})-1} + (\mathrm{card}(\mathscr{P})-1)h(Y_i))d_i$$

où $\tau_{\mathrm{card}(\mathscr{P})-1}$ est une constante positive et indépendante de $d_1,\ldots,d_m$. En utilisant l'étape 2, on en déduit qu'il existe une constante $\tau_{\mathrm{card}(\mathscr{P})}$ telle que

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y)) \ge -\dim(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y))\sum_{i=1}^m(\tau_{\mathrm{card}(\mathscr{P})} + \mathrm{card}(\mathscr{P})h(Y_i))d_i,$$

et la propriété est démontrée. Nous obtenons la proposition suivante, dont la seconde partie est une conséquence de la proposition 3.5.4.

PROPOSITION 3.5.5. *Il existe une constante positive* c_6 *indépendante de* $\mathbf{d}$ *telle que*

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y)) \geq -\dim(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y))\sum_{i=1}^{m}(c_6+\operatorname{card}(\mathscr{P})h(Y_i))d_i.$$

Si $\delta < \min_{w\in\mathscr{P}} c_{w,e_w}/2$ *et si*

$$m \geq \frac{4\max_{w\in\mathscr{P}} c_{w,e_w}^2 \log(\operatorname{card}(\mathscr{P}))}{3\delta^2},$$

alors il existe une constante $c_8 > 0$ *indépendante de* $\mathbf{d}$ *telle que*

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y)) \geq -c_8\sum_{i=1}^{m}(c_6+\operatorname{card}(\mathscr{P})h(Y_i))d_i.$$

3.5.4. Minoration de l'indice d'une section. Soit $Y = Y_1 \times_L \cdots \times_L Y_m$ une sous variété produit de $X_L^{(m)}$. L'objet de ce paragraphe est de démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 3.5.6. *Considérons une famille de nombres réels* $(t_w)_{w\in\mathscr{P}}$ *et supposons que* $\sum_{w\in\mathscr{P}} t_w > m[L:\mathbb{Q}]$. *Pour tout* $i \in \{1,\ldots,m\}$, *considérons une bonne projection* $\pi_i\colon Y_i \to \mathbb{P}_L^{\dim Y_i}$ *et notons* $G_i \in L[X_0,\ldots,X_{\dim Y_i}]$ *le polynôme homogène associé. Soit* ε *un nombre réel vérifiant*

$$0 < \varepsilon < \frac{\sum_{w\in\mathscr{P}} t_w/m - [L:\mathbb{Q}]}{\left([L:\mathbb{Q}] + \sum_{w\in\mathscr{P}} c_{w,e_w}\right)}.$$

Soient $d_1,\ldots,d_m$ *des entiers tels que* $d_1 > d_2 > \cdots > d_m > 0$ *et tels que la famille de filtrations* $(\Gamma_{\mathbf{d}}(Y),(\mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}})$ *soit bien définie. Supposons que l'espace vectoriel*

$$\widetilde{W}_{\mathbf{d}}(Y) = \bigcap_{w\in\mathscr{P}} \mathscr{F}_w^{t_w}\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)$$

soit non nul. Soit $c_9 > 0$ *un nombre réel tel que*

$$\sum_{i=1}^{m} d_i h(Y_i) \leq c_9(d_1+\ldots+d_m) \quad et \quad \deg Y_i \leq c_9 \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}.$$

Alors il existe une constante c_{10} *vérifiant la propriété suivante. Pour toute famille* $x = (x_1,\ldots,x_m) \in Y(K)$ *de solutions du système d'inégalités* (21) *telle que*

- $\forall i \in \{1,\ldots,m\}$, $\pi_i(x_i) \notin V(G_i)$,
- $d_1h(x_1) \leq d_ih(x_i) \leq (1+\varepsilon)d_1h(x_1)$,
- $h(x_1) \geq c_{10}$,

et pour toute section non nulle $s \in \widetilde{W}_{\mathbf{d}}(Y)$ *telle que*

$$h(s) \leq c_9(d_1+\cdots+d_m),$$

l'indice de s *en* x *vérifie* $\operatorname{ind}_x(s) > m\varepsilon$.

Dans la suite nous noterons

$$\mathscr{N} = \mathbb{N}^{\dim Y_1} \times \cdots \times \mathbb{N}^{\dim Y_m}$$

et

$$\operatorname{ind}(\boldsymbol{\tau}) = \frac{|\boldsymbol{\tau}_1|}{d_1} + \cdots + \frac{|\boldsymbol{\tau}_m|}{d_m}$$

pour tout $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}_1,\ldots,\boldsymbol{\tau}_m) \in \mathscr{N}$. Considérons un voisinage ouvert (pour la topologie de Zariski) $U = U_1 \times \cdots \times U_m$ de x dans Y sur lequel $\mathscr{O}_Y(\mathbf{d})$ est trivial : il existe une section $s_0 \in \mathrm{H}^0(U, \mathscr{O}_Y(\mathbf{d})_{|U})$ ne s'annulant pas sur U et pour toute section $s \in \Gamma_{\mathbf{d}}(Y)$, il existe une fonction $f \in \mathscr{O}_Y(U)$ telle que $s_{|U} = f \cdot s_0$. Pour tout $i \in \{1,\ldots,m\}$, on considère une base $\widetilde{\partial}_{i,1},\ldots,\widetilde{\partial}_{i,\dim Y_i}$ de dérivations sur $\mathbb{P}_K^{\dim Y_i}$, c'est-à-dire une base du K-espace vectoriel

$$\mathrm{H}^0(\mathbb{P}_K^{\dim Y_i}, \operatorname{Hom}(\Omega^1_{\mathbb{P}^{\dim Y_i}/K}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{\dim Y_i}})).$$

Pour tout $j \in \{1,\dots,\dim Y_i\}$, posons $\partial_{i,j} = \pi_i^*(G_i\widetilde{\partial}_{i,j})_{|U_i} \in \mathrm{H}^0(U_i, \mathrm{Hom}(\Omega^1_{Y_i/K}, \mathscr{O}_{Y_i}))$. La restriction de la famille $(\partial_{i,1},\dots,\partial_{i,\dim Y_i})$ fournit une base de l'espace tangent T_{Y_i,x_i}, que l'on notera encore $(\partial_{i,1},\dots,\partial_{i,\dim Y_i})$. Nous noterons $\mathbf{z}_i = (z_{i,1},\dots,z_{i,\dim Y_i})$ le système de paramètres associé. Pour $\boldsymbol{\tau} \in \mathscr{N}$, posons

$$\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} = \bigotimes_{i=1}^m \prod_{k=1}^{\dim Y_i} \frac{\partial_{i,k}^{\tau_{i,k}}}{\tau_{i,k}!}.$$

Soit $s \in \widetilde{W}_{\mathbf{d}}(Y) \setminus \{0\}$ une section telle que

$$h(s) \leq c_9(d_1 + \cdots + d_m). \tag{24}$$

Nous allons raisonner par contraposée en supposant que l'indice $\sigma := \mathrm{ind}_x(s)$ de s en x est inférieur à $m\varepsilon$. Nous devons montrer qu'il existe une constante c_{10} indépendante de x telle que $h(x_1) \leq c_{10}$. Soit $\widetilde{W}_{\mathbf{d},\sigma}(Y)$ le sous-espace vectoriel de $\widetilde{W}_{\mathbf{d}}(Y)$ des sections d'indice supérieur à σ en x. D'après la discussion terminant le paragraphe 3.2, c'est l'ensemble des sections s' de $\widetilde{W}_{\mathbf{d}}(Y)$ vérifiant : pour tout nombre rationnel $\sigma' < \sigma$, on a

$$\sum_{\mathrm{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma'} \mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} s'(x)\mathbf{z}_1^{\boldsymbol{\tau}_1}\cdots\mathbf{z}_m^{\boldsymbol{\tau}_m} = 0.$$

On considère le L-espace vectoriel

$$F = \sum_{\substack{\boldsymbol{\tau}\in\mathscr{N} \\ \mathrm{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma}} \bigotimes_{i=1}^m S^{|\boldsymbol{\tau}_i|} T^{\vee}_{Y_i,x_i} \otimes_L \mathscr{O}_Y(\mathbf{d})(x).$$

et l'application

$$\varphi\colon \widetilde{W}_{\mathbf{d},\sigma}(Y) \to F, \quad s' \mapsto \left(\sum_{\mathrm{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma} \mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} f'(x)\mathbf{z}_1^{\boldsymbol{\tau}_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{z}_m^{\boldsymbol{\tau}_m}\right) \otimes s_0(x) \in F$$

où $f' \in \mathscr{O}_Y(U)$ est une fonction telle que $s'_{|U} = f'\cdot s_0$. Par la formule de Leibniz, l'application φ est indépendante du choix de la trivialisation de $\mathscr{O}_Y(\mathbf{d})$. Par définition de σ, la section s appartient à $\widetilde{W}_{\mathbf{d},\sigma}(Y)$ et $\varphi(s) \neq 0$.

Pour tout $i \in \{1,\dots,m\}$, on munit l'espace vectoriel $T^{\vee}_{Y_i,x_i}$ de la structure de fibré adélique hermitien pour laquelle la base

$$(\|G_i\|_{v,\sup} z_{i,1},\dots,\|G_i\|_{v,\sup} z_{i,\dim Y_i})$$

de $T^{\vee}_{Y_i,x_i}\otimes_L \mathbb{C}_v$ est orthonormée en chaque place v de L. La métrique $(\|.\|_v)_{v\in\Sigma_L}$ sur $\mathscr{O}_Y(\mathbf{d})$ confère également une structure de fibré adélique hermitien au L-espace vectoriel $\mathscr{O}_Y(\mathbf{d})(x) \simeq L$, et ces choix induisent une structure de fibré adélique $(F, (\|.\|_v)_{v\in\Sigma_L})$ sur F par produit tensoriel. Soit $s' \in \widetilde{W}_{\mathbf{d},\sigma}(Y)$ et soit $f' \in \mathscr{O}_Y(U)$ telle que $s'_{|U} = f'\cdot s_0$. Soit v une place de L. Rappelons que l'on a noté $a(v) = 1$ si $v|\infty$ et $a(v) = 0$ sinon. La définition des normes induites par produit tensoriel et par puissance symétrique (voir le paragraphe 1.1.3) entraîne que la quantité $\|\varphi(s')\|_v$ est majorée par

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{card}\{\boldsymbol{\tau}\in\mathscr{N} \mid \mathrm{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma\})^{a(v)} \times \max_{\mathrm{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma} \left|\frac{\boldsymbol{\tau}!}{\sigma!}\right|_v^{a(v)/2} |\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} f'(x)|_v \,\|\mathbf{z}_1^{\boldsymbol{\tau}_1}\otimes\cdots\otimes\mathbf{z}_m^{\boldsymbol{\tau}_m}\|_v\cdot\|s_0(x)\|_v \\
&\quad\leq (\mathrm{card}\{\boldsymbol{\tau}\in\mathscr{N} \mid \mathrm{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma\})^{a(v)} \times \max_{\mathrm{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma} |\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} f'(x)|_v \prod_{i=1}^m \|G_i\|_v^{-|\boldsymbol{\tau}_i|}|\cdot\|s_0(x)\|_v
\end{aligned}$$

(où la majoration $|\boldsymbol{\tau}!/\sigma!|_v^{a(v)} \leq 1$ provient du fait que $\sigma!/\boldsymbol{\tau}! \in \mathbb{N}$ est un coefficient multinomial). Pour toute place v de L, on a donc

$$\begin{aligned}\|\varphi(s')\|_v &\leq (\operatorname{card}\{\boldsymbol{\tau} \in \mathscr{N} \mid \operatorname{ind}(\boldsymbol{\tau}) = \sigma\})^{a(v)} \times \max_{\operatorname{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma} \prod_{i=1}^{m} \|G_i\|_v^{-|\boldsymbol{\tau}_i|} |\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} f'(x)|_v \|s_0(x)\|_v \\ &= (\operatorname{card}\{\boldsymbol{\tau} \in \mathscr{N} \mid \operatorname{ind}(\boldsymbol{\tau}) = \sigma\})^{a(v)} \times \max_{\operatorname{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma} \prod_{i=1}^{m} \|G_i\|_v^{-|\boldsymbol{\tau}_i|} \|\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} s'(x)\|_v.\end{aligned}$$

Comme $\varphi(s) \neq 0$, la définition de $h(\varphi)$ entraîne immédiatement l'inégalité

$$h(\varphi(s)) \leq h(s) + h(\varphi).$$

Par définition de la pente maximale, on a par ailleurs l'inégalité

$$-\widehat{\mu}_{\max}(F) \leq -\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(\operatorname{Vect}(\varphi(s))) = -\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\operatorname{Vect}(\varphi(s))) = h(\varphi(s)),$$

et on en déduit que

$$-\widehat{\mu}_{\max}(F) \leq h(s) + h(\varphi). \tag{25}$$

Nous allons obtenir un majorant de $h(x_1)$ grâce à cette inégalité.

3.5.4.1. *Majoration de $\widehat{\mu}_{\max}(F)$.* Comme $\mathscr{O}_Y(\mathbf{d})(x)$ est de dimension 1, la proposition 1.1.19 entraîne

$$\widehat{\mu}_{\max}(F) = \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\mathscr{O}_Y(\mathbf{d})(x)) + \widehat{\mu}_{\max}\left(\bigoplus_{\substack{|\boldsymbol{\tau}_1|,\ldots,|\boldsymbol{\tau}_m|,\\ \operatorname{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma}} \bigotimes_{i=1}^{m} S^{|\boldsymbol{\tau}_i|} T^{\vee}_{Y_i,x_i}\right).$$

Puisque la section s_0 de $\mathscr{O}_Y(\mathbf{d})$ ne s'annule pas en x, on a $s_0(x) \in \mathscr{O}_Y(\mathbf{d})(x) \setminus \{0\}$, et on en déduit que

$$\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\mathscr{O}_Y(\mathbf{d})(x)) = -\sum_{v\in\Sigma_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L:\mathbb{Q}]} \log \|s_0(x)\|_v = h_{\mathscr{O}_Y(\mathbf{d})}(x)$$

par définition de $\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}$ et de la hauteur de $h_{\mathscr{O}_Y(\mathbf{d})}(x)$. Comme

$$\mathscr{O}_Y(\mathbf{d}) = \operatorname{pr}_1^* \mathscr{O}_{Y_1}(1)^{\otimes d_1} \otimes_{\mathscr{O}_Y} \cdots \otimes \operatorname{pr}_m^* \mathscr{O}_{Y_m}(1)^{\otimes d_m},$$

les propriétés de la hauteur associée à un fibré inversible adélique rappelées au paragraphe 1.3.3 entraînent que $\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\mathscr{O}_Y(\mathbf{d})(x)) = \sum_{i=1}^m d_i h(x_i)$. D'après la proposition 1.1.21 de la page 33, on a par ailleurs

$$\widehat{\mu}_{\max}\left(\bigoplus_{\substack{|\boldsymbol{\tau}_1|,\ldots,|\boldsymbol{\tau}_m|,\\ \operatorname{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma}} \bigotimes_{i=1}^{m} S^{|\boldsymbol{\tau}_i|} T^{\vee}_{Y_i,x_i}\right) = \max_{\operatorname{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma} \left\{\widehat{\mu}_{\max}\left(\bigotimes_{i=1}^{m} S^{|\boldsymbol{\tau}_i|} T^{\vee}_{Y_i,x_i}\right)\right\}.$$

Pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathscr{N}$ tel que $\operatorname{ind}(\boldsymbol{\tau}) \leq \sigma$, les propositions 1.1.20 et 1.1.17 entraînent que

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}_{\max}\left(\bigotimes_{i=1}^{m} S^{|\boldsymbol{\tau}_i|} T^{\vee}_{Y_i,x_i}\right) &\leq \sum_{i=1}^{m} \widehat{\mu}_{\max}\left(S^{|\boldsymbol{\tau}_i|} T^{\vee}_{Y_i,x_i}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \log\dim(S^{|\boldsymbol{\tau}_i|} T_{X_i,x_i}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} |\boldsymbol{\tau}_i| \widehat{\mu}_{\max}(T^{\vee}_{Y_i,x_i}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} d_i \log(n+1)).\end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, on a par ailleurs

$$\widehat{\mu}_{\max}(T^{\vee}_{Y_i,x_i}) = \widehat{\mu}_{\max}\left(\bigoplus_{j=1}^{\dim Y_i} \operatorname{Vect}(z_{i,j})\right) = \max_{1\leq j\leq \dim Y_i} \widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(\operatorname{Vect}(z_{i,j})) = h(G_i)$$

d'après la proposition 1.1.21 page 33. On en déduit que

$$\sum_{i=1}^{m} |\boldsymbol{\tau}_i| \widehat{\mu}_{\max}(T^{\vee}_{Y_i,x_i}) = \sum_{i=1}^{m} |\boldsymbol{\tau}_i| h(G_i).$$

En utilisant la proposition 3.2.1 et les hypothèses faites sur les degrés et les hauteurs des variétés Y_i, on en déduit qu'il existe une constante c_{11} positive telle que

$$\widehat{\mu}_{\max}(F) \leq \sum_{i=1}^{m} d_i h(x_i) + c_{11}(d_1 + \cdots + d_m). \tag{26}$$

La constante c_{11} ne dépend que de n et de c_9.

3.5.4.2. *Majoration de $h(\varphi)$.* Nous cherchons maintenant à majorer la quantité

$$h(\varphi) = \sum_{v \in \Sigma_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log \|\varphi\|_v,$$

où $\|\varphi\|_v = \sup\{\|\varphi(g)\|_v / \|g\|_{v,\sup} \mid g \in \widetilde{W}_{\mathbf{d},\sigma}(Y) \otimes_L \mathbb{C}_v \setminus \{0\}\}$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 3.5.7. *Il existe une constante $c_{12} > 0$ telle que pour toute place $w \in \mathscr{P}$, on ait la propriété suivante. Soit $s' \in \mathscr{F}_w^{t_w} \Gamma_{\mathbf{d}}(Y) \otimes_L \mathbb{C}_w$ et soit $\boldsymbol{\tau} \in \mathscr{N}$ tel que* $\mathrm{ind}(\boldsymbol{\tau}) = \mathrm{ind}_x(s') = \sigma$. *Alors*

$$\|\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} s'(x)\|_w \leq c_{12}^{a(w)(d_1+\cdots+d_m)} \|s'\|_{w,\sup} \exp(-d_1 h(x_1)(t_w - c_{w,e_w}\sigma)/[L_w : \mathbb{Q}_w]) \prod_{i=1}^{m} \|G_i\|_{w,\sup}^{|\boldsymbol{\tau}_i|}.$$

Démonstration : Supposons que la place w est ultramétrique. Soit $\alpha \in]0,1[$ un nombre réel. D'après la proposition 1.1.5 page 28, il existe une base $(s_1, \ldots s_{\dim V})$ de $V \otimes_L \mathbb{C}_v$ adaptée à la filtration $(V, \mathscr{F}_w)$ telle que

$$\alpha \max_{1 \leq k \leq \dim V} |b_k|_w \|s_k\|_{w,\sup} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\dim V} b_k s_k \right\|_{w,\sup}$$

pour toute famille $(b_k)_{1 \leq k \leq \dim V}$ d'éléments de $\mathbb{C}_w^{\dim V}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et pour tout $k \in \{1 \leq \cdots, \leq \dim V\}$, on pose $s_{i,k} = \mathrm{pr}_i^* s_k$. La section s' s'écrit sous la forme

$$s' = \bigotimes_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{\dim V} b_{i,k} s_{i,k|Y_i} \right)^{d_i} = \bigotimes_{i=1}^{m} \left(\sum_{|\boldsymbol{\lambda}_i| = d_i} a_{\boldsymbol{\lambda}_i} \prod_{k=1}^{\dim V} s_{i,k|Y_i}^{\lambda_{i,k}} \right)$$

avec $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\dim V} \frac{\lambda_{i,k} \operatorname{ord}_w(s_{i,k})}{d_i} \geq t_w$ et $a_{\boldsymbol{\lambda}_i} = \binom{d_i}{\boldsymbol{\lambda}_i} b_{i,1}^{\lambda_{i,1}} \cdots b_{\dim V}{}^{\lambda_{i,\dim V}}$. Pour tout entier $1 \leq i \leq m$ la norme $\|.\|_{w,\sup}$ sur $\Gamma_{d_i}(Y_i)$ est la norme quotient de la norme $\|.\|_{w,\sup}$ sur $\Gamma_{d_i}(X)$. On en déduit que l'on peut choisir les familles $(b_{i,k})_{1 \leq k \leq \dim V}$ de sorte que

$$\begin{aligned}
\|s'\|_{w,\sup} = \prod_{i=1}^{m} \left\| \sum_{k=1}^{\dim V} b_{i,k} s_{i,k|Y_i} \right\|_{w,\sup}^{d_i} &\geq \alpha \prod_{i=1}^{m} \left\| \sum_{k=1}^{\dim V} b_{i,k} s_{i,k} \right\|_{w,\sup}^{d_i} \\
&\geq \alpha \prod_{i=1}^{m} \alpha^{d_i} \big(\max_{1 \leq k \leq \dim V} |b_{i,k}|_w \|s_{i,k}\|_{w,\sup} \big)^{d_i} \\
&\geq \alpha \prod_{i=1}^{m} \alpha^{d_i} \max_{\boldsymbol{\lambda}_i} |a_{\boldsymbol{\lambda}_i}|_w \max_{1 \leq k \leq \dim V} \|s_{i,k}\|_{w,\sup}^{d_i}.
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.4.2, on a les majorations

$$\begin{aligned}\|\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} s'(x)\|_w \leq \prod_{i=1}^m \Big\{ &(1+\alpha)\|G_i\|_{w,\sup}^{|\boldsymbol{\tau}_i|} \max_{1\leq k\leq \dim V, \boldsymbol{\lambda}_i} |a_{\boldsymbol{\lambda}_i}|_w \|s_{i,k}\|_{w,\sup}^{d_i} \\ &\times \max_{\mathbf{j}\in I_{\boldsymbol{\tau}}(\dim V)} \prod_{k=1}^{\dim V} \|s_{i,k}(x_i)\|_v^{\max(\lambda_{i,k}-|\mathbf{j}_k|,0)} \Big\} \\ \leq \prod_{i=1}^m \Big\{ &(1+\alpha)\|G_i\|_{w,\sup}^{|\boldsymbol{\tau}_i|} \max_{1\leq k\leq \dim V, \boldsymbol{\lambda}_i} |a_{\boldsymbol{\lambda}_i}|_w \|s_{i,k}\|_{w,\sup}^{d_i} \\ &\times \max_{\mathbf{j}\in I_{\boldsymbol{\tau}}(\dim V)} \exp\left(-h(x_i) \sum_{k=1}^{\dim V} \mathrm{ord}_w(s_{i,k}) \max(\lambda_{i,k}-|\mathbf{j}_k|,0)/[L_w:\mathbb{Q}_w]\right) \Big\} \\ \leq \prod_{i=1}^m &(1+\alpha)\|G_i\|_{w,\sup}^{|\boldsymbol{\tau}_i|} \max_{1\leq k\leq \dim V, \boldsymbol{\lambda}_i} |a_{\boldsymbol{\lambda}_i}|_w \|s_{i,k}\|_{w,\sup}^{d_i} \\ &\times \exp(-d_1 h(x_1)(t_w - c_{w,e_w}\sigma)/[L_w:\mathbb{Q}_w]),\end{aligned}$$

en remarquant que pour tous $\mathbf{j}^{(1)},\ldots,\mathbf{j}^{(m)}$ dans $I_{\boldsymbol{\tau}}(n+1)$, on a

$$\begin{aligned}-\sum_{i=1}^m h(x_i) \sum_{k=1}^{\dim V} \mathrm{ord}_w(s_{i,k}) \max(\lambda_{i,k}-|\mathbf{j}_k^{(i)}|,0) &\leq -d_1 h(x_1) \sum_{i,k} \frac{\mathrm{ord}_w(s_{i,k})(\lambda_{i,k}-|\mathbf{j}_k^{(i)}|)}{d_i} \\ &\leq -d_1 h(x_1)(t_w - c_{w,e_w}\sigma).\end{aligned}$$

On en déduit que la quantité $\|\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} s'(x)\|_w$ est majorée par

$$\frac{(1+\alpha)^m}{\alpha^{1+d_1+\cdots+d_m}} \prod_{i=1}^m \|G_i\|_{w,\sup}^{|\boldsymbol{\tau}_i|} \times \|s'\|_{w,\sup} \exp(-d_1 h(x_1)(t_w - c_{w,e_w}\sigma)/[L_w:\mathbb{Q}_w]),$$

et on conclut en faisant tendre α vers 1. Si la place w est archimédienne, on applique le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à une norme hermitienne $\|.\|'_w$ sur $V\otimes_L \mathbb{C}_w$ vérifiant $\alpha\|.\|_{w,\sup} \leq \|.\|'_w \leq \|.\|_{w,\sup}$ pour construire une base $(s_1,\ldots s_{\dim V})$ de $V = \mathrm{H}^0(X_L, \mathscr{O}_{X_L}(1))\otimes_l \mathbb{C}_w$ adaptée à la filtration $(V,\mathscr{F}_w)$ telle que

$$\alpha\left(\sum_{1\leq k\leq \dim V} (|b_k|_w \|s_k\|_{w,\sup})^2\right)^{1/2} \leq \left\|\sum_{k=1}^{\dim V} b_k s_k\right\|_{w,\sup}$$

pour toute famille $(b_k)_{1\leq k\leq \dim V}$ d'éléments de $\mathbb{C}_w^{\dim V}$. On démontre alors le lemme 3.5.7 de la même façon que dans le cas ultramétrique.

□

Ce lemme conduit à la proposition suivante.

Proposition 3.5.8. *Il existe une constante* c_{13} *telle que*

$$h(\varphi) \leq c_{13} m d_1 - m d_1 \gamma h(x_1),$$

où $\gamma = \sum_{w\in\mathscr{P}} (t_w/m - c_{w,e_w}\varepsilon)/[L:\mathbb{Q}]$.

Démonstration : Soit w une place de $\mathscr{P}$ et soit $s' \in \widetilde{W}_{\mathbf{d},\sigma}(Y)$ une section non nulle. Alors s' appartient à $\mathscr{F}_w^{t_w}\Gamma_{\mathbf{d}}(Y)\otimes_L \mathbb{C}_v$ et l'on a

$$\|\varphi(s')\|_w \leq \max_{\mathrm{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma} \prod_{i=1}^m \|G_i\|_{w,\sup}^{-|\boldsymbol{\tau}_i|} \|\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}} s'(x)\|_w \times (\mathrm{card}\{\boldsymbol{\tau}\in\mathscr{N} \mid \mathrm{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma\})^{a(w)}, \tag{27}$$

où $a(w)=1$ si $w|\infty$ et $a(w)=0$ sinon. Soit $\boldsymbol{\tau}\in\mathscr{N}$ tel que $\mathrm{ind}(\boldsymbol{\tau})=\sigma$. D'après le lemme 3.5.7 et l'inégalité (27), il existe une constante c telle que

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_w &\leq c^{a(w)(d_1+\cdots+d_m)} \exp(-d_1 h(x_1)(t_w - c_{w,e_w}\sigma)/[L_w:\mathbb{Q}_w]) \\ &\leq c^{a(w)(d_1+\cdots+d_m)} \exp(-d_1 h(x_1)(t_w - m c_{w,e_w}\varepsilon)/[L_w:\mathbb{Q}_w]).\end{aligned}$$

Considérons maintenant une place quelconque v de L et un nombre réel $\varepsilon' > 0$. D'après le lemme 3.4.1 et l'inégalité (27), quitte à agrandir c, on a

$$\|\varphi(s')\|_v \leq (1+\varepsilon')c^{a(v)(d_1+\cdots+d_m)}\|s'\|_{v,\mathrm{sup}}.$$

On en déduit que $\|\varphi\|_v \leq (1+\varepsilon')c^{a(v)(d_1+\cdots+d_m)}$. En faisant tendre ε' vers 0, on a $\|\varphi\|_v \leq c^{a(v)(d_1+\cdots+d_m)}$. Finalement, on a

$$h(\varphi) \leq c(d_1+\cdots+d_m) - d_1 h(x_1)\sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{t_w - m\varepsilon c_{w,e_w}}{[L:\mathbb{Q}]} \leq cmd_1 - md_1\gamma h(x_1),$$

ce qui achève la preuve.

$\square$

3.5.4.3. *Démonstration de la proposition 3.5.6.* D'après les inégalités (24), (25), (26) et la proposition 3.5.8, il existe une constante c'_{10} ne dépendant que de n, $[L:\mathbb{Q}]$, c_9 telle que

$$md_1(\gamma-(1+\varepsilon))h(x_1) \leq c'_{10}md_1.$$

Par ailleurs, l'hypothèse faite sur ε assure que $c''_{10} := \gamma-(1+\varepsilon) > 0$, et on a donc $h(x_1) \leq c'_{10}/c''_{10}$, ce qui achève la preuve.

REMARQUE 3.5.9. En choisissant ε de sorte que

$$0 < \varepsilon < \frac{\sum_{w\in\mathscr{P}} t_w/m - [L:\mathbb{Q}]}{\left(\frac{3}{2}[L:\mathbb{Q}] + \sum_{w\in\mathscr{P}} c_{w,e_w}\right)},$$

on a l'inégalité $\gamma-(1+\varepsilon) > \varepsilon/2$, qui conduit à la majoration $h(x_1) < 2c'_{10}/\varepsilon$. Dans cette situation, la constante c_{10} obtenue dans la proposition 3.5.6 ne dépend que de n, $[L:\mathbb{Q}]$, c_9 et ε.

3.6. Démonstration du théorème 3.1.1

On considère un nombre réel $\varepsilon > 0$ et un entier naturel m non nul. Soit $r(\varepsilon) \geq 1$ un nombre réel vérifiant la propriété du théorème du produit 3.3.1. Soit $x = (x_1,\ldots,x_m) \in X^{(m)}(K)$ un m-uplet de solutions de (21). Supposons qu'il existe des entiers naturels non nuls $d_1,\ldots,d_m$ tels que pour tout $i \in \{2,\ldots,m\}$, on ait

$$\left\{\begin{array}{l} d_{i-1}/d_i \geq r(\varepsilon), \\ d_1 h(x_1) \leq d_i h(x_i) \leq (1+\varepsilon)d_1 h(x_1). \end{array}\right. \tag{28}$$

Posons $\mathbf{d} := (d_1,\ldots,d_m) \in \mathbb{N}^m$. Dans la suite, le mot constante désigne un nombre réel indépendant de x et de $\mathbf{d}$.

REMARQUE 3.6.1. Si $h(x_{i+1}) \geq (1+\varepsilon)r(\varepsilon)h(x_i)$ pour tout $i \in \{1,\ldots,m-1\}$, il existe des entiers naturels non nuls $d_1,\ldots,d_m$ satisfaisant (28) (voir [**26**, page 127]). Dans ce cas, on peut également choisir les entiers $d_1,\ldots,d_m$ arbitrairement grands (quitte à multiplier $\mathbf{d}$ par un entier).

La démonstration du théorème 3.1.1 repose sur la proposition suivante.

PROPOSITION 3.6.2. *Supposons que la famille de filtrations $(V,\mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ soit semi-stable. Si m et $d_1,\ldots,d_m$ sont assez grands et si ε est suffisamment petit, alors pour tout entier $j \in \{0,\ldots,m\dim X\}$, il existe une constante $c_{14}(j)$ satisfaisant la condition suivante. Si $h(x_1) > c_{14}(j)$, alors il existe un produit de variétés géométriquement irréductibles*

$$Y^{(j)} = Y_1^{(j)} \times_L \cdots \times_L Y_m^{(j)} \subseteq X_L^{(m)}$$

défini sur L, contenant x, de dimension $\dim Y^{(j)} \leq m\dim X - j$ et tel que :

$$\deg Y_i^{(j)} \leq c_{14}(j) \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}$$

et

$$\sum_{i=1}^m d_i h(Y_i^{(j)}) \leq c_{14}(j)(d_1+\ldots+d_m).$$

Démonstration : Nous allons démontrer la proposition par récurrence. Pour $j = 0$ il suffit considérer un produit $Y^{(0)} \subset X_L^{(m)}$ de composantes irréductibles de X_L contenant x et de poser $c_{14}(0) = \max_Z\{\deg Z, h(Z)\}$, où le maximum est pris sur l'ensemble des composantes irréductibles Z de X_L. Supposons que l'on ait démontré la proposition jusqu'à l'ordre j et considérons une variété $Y^{(j)} = Y_1^{(j)} \times \cdots \times Y_m^{(j)} \subseteq X_L^{(m)}$ satisfaisant les conditions de la proposition. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, le L-espace vectoriel $\Gamma_{d_i}(Y_i^{(j)})$ est un quotient de $\Gamma_{d_i}(X) = S^{d_i}V$ pourvu que d_i soit suffisamment grand. Par ailleurs, on a $\mathbb{E}_{i,d_i,w}(Y^{(j)}) = \mu_w(\Gamma_{d_i}(Y_i^{(j)}))/d_i$. La semi-stabilité de la famille de filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ entraîne que $W = V$ et d'après la proposition 1.6.9 page 45, on a

$$\frac{1}{d_i}\sum_{w\in\mathscr{P}} \mu_w(\Gamma_{d_i}(Y_i^{(j)})) \geq \frac{1}{d_i}\sum_{w\in\mathscr{P}} \mu_w(S^{d_i}V) = \sum_{w\in\mathscr{P}} \mu_w(V) > [L:\mathbb{Q}] + \delta$$

(la dernière inégalité est une conséquence du choix de δ que nous avons fait à la page 64). On en déduit que $\sum_{w\in\mathscr{P}}(\mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(Y^{(j)}) - m\delta) > m[L:\mathbb{Q}]$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ considérons une bonne projection π_i de $Y_i^{(j)}$ et notons G_i le polynôme associé. S'il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\pi_i(x_i) \in V(G_i)$, on pose $Y_i^{(j+1)} = \pi_i^{-1}(V(G_i))$ et $Y_k^{(j+1)} = Y_k^{(j)}$ pour tout $k \neq j$. La variété

$$Y^{(j+1)} = Y_1^{(j+1)} \times \cdots \times Y_m^{(j+1)} \subsetneq Y^{(j)}$$

ainsi définie satisfait les conditions du théorème (voir [**26**, page 129]). Dans la suite, nous pouvons donc supposer que $\pi_i(x_i) \notin V(G_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$. Considérons le sous-espace

$$W_{\mathbf{d}}(Y^{(j)}) = \bigcap_{w\in\mathscr{P}} \mathscr{F}_w^{\mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(Y^{(j)})-m\delta}\Gamma_{\mathbf{d}}(Y^{(j)})$$

de $\Gamma_{\mathbf{d}}(Y^{(j)}) = \mathrm{H}^0(Y^{(j)}, \mathscr{O}_{Y^{(j)}}(\mathbf{d}))$ défini au paragraphe 3.5.2. Nous allons appliquer la proposition 3.5.6 à $W_{\mathbf{d}}(Y^{(j)})$ et $t_w = \mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(Y^{(j)}) - m\delta$ afin d'appliquer le théorème du produit de Faltings (théorème 3.3.1). D'après la proposition 3.5.5, si m est suffisamment grand, alors il existe des constantes strictement positives c_6 et c_8 telles que

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y^{(j)})) \geq -c_8\sum_{i=1}^m (c_6 + \mathrm{card}(\mathscr{P})h(Y_i^{(j)}))d_i \geq -c_8(mc_6 + \mathrm{card}(\mathscr{P})c_{14}(j))(d_1 + \cdots + d_m).$$

D'après la proposition 1.1.16, on en déduit qu'il existe des constantes c et c' et une section non nulle $s \in W_{\mathbf{d}}(Y^{(j)})$ telle que

$$\begin{aligned} h(s) = \lambda_1(W_{\mathbf{d}}(Y^{(j)})) &\leq c'(d_1 + \ldots + d_m) - \widehat{\mu}_{\max}(W_{\mathbf{d}}(Y^{(j)})) \\ &\leq c'(d_1 + \ldots + d_m) - \widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(Y^{(j)})) \\ &\leq c(d_1 + \ldots + d_m). \end{aligned}$$

En appliquant la proposition 3.5.6 avec $c_9 = \max\{c, c_{14}(j)\}$, on en déduit que l'indice de s en x est supérieur à $m\varepsilon$. Le théorème 3.3.1 fournit alors une sous-variété $Y^{(j+1)}$ vérifiant les conditions de la proposition.

□

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.1.1.

Démonstration : Supposons dans un premier temps que la famille de filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_w$ est semi-stable. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une infinité de solutions au système d'inégalités (21). Soit m un entier arbitrairement grand. Par la propriété de Northcott (théorème 1.3.8 page 38), on peut choisir un m-uplet de solutions $x = (x_1, \ldots, x_m)$ vérifiant $h(x_1) > c_{14}(m \dim X)$ (où $c_{14}(m\dim X)$ désigne la constante de la proposition 3.6.2) et $h(x_{i+1}) \geq (1+\varepsilon)r(\varepsilon)h(x_i)$ pour tout $1 \leq i \leq m-1$. D'après la remarque 3.6.1, il existe un m-uplet $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_m) \in \mathbb{N}^m$ d'entiers arbitrairement grands vérifiant (28). Pour $j = m\dim X$, la variété de la proposition 3.6.2 est $Y^{(m\dim X)} = \{x_1\} \times \cdots \times \{x_m\}$. On en déduit que

$$md_1h(x_1) \leq \sum_{i=1}^{m} d_ih(x_i) \leq c_{14}(m\dim X)(d_1+\cdots+d_m) \leq mc_{14}(m\dim X)d_1,$$

et donc $h(x_1) \leq c_{14}(m\dim X)$, ce qui est absurde. Le théorème est donc démontré dans le cas où la famille de filtrations est semi-stable.

Si la famille de fitrations n'est pas semi-stable, notons $\pi : \widetilde{X} \to X_L$ l'éclatement de X_L le long de Z et E_Z le diviseur exceptionnel. Le morphisme π est surjectif et induit un isomorphisme de $\widetilde{X} \setminus E_Z$ sur $X_L \setminus Z$. La famille de filtrations $(V, \mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ induit une famille de filtrations sur W, qui est semi-stable par définition de W. Notons I_Z l'idéal de définition de Z dans X. On a $I_Z = \pi_*\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(1)$ (voir [**44**, proposition II.7.11 (a)]), donc $W = \mathrm{H}^0(X, I_Z) = \mathrm{H}^0(X, \pi_*\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(1)) = \mathrm{H}^0(\widetilde{X}, \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(1)) =: \widetilde{W}$. On munit ainsi le L-espace vectoriel $\widetilde{W}$ d'une famille de filtrations $(\widetilde{W}, \mathscr{F}_w)_{w\in\mathscr{P}}$ semi-stable. De plus, la surjection $\pi^*I_Z \to \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(1)$ (voir [**44**, proposition II.7.11 (b)]) permet de munir le fibré inversible $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(1)$ d'une métrique $(\|.\|_v)_{v\in\Sigma_L}$ vérifiant : pour toute place v de L et pour tout $x \in (X_L \setminus Z)(\mathbb{C}_v)$, on a $\|s(x)\|_v = \|\pi^*s(\pi^{-1}(x)\|_v$ pour toute section s de W ne s'annulant pas en x. En particulier, pour tout $x \in X(K)$ en dehors de Z, on a $h_{\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(1)}(\pi^{-1}(x)) = h_{\mathscr{O}_X(1)}(x) = h(x)$. Si $x \in (X_L \setminus Z)(K)$ vérifie le système d'inégalités (21), on en déduit que

$$\frac{\|\widetilde{s}(\pi^{-1}(x))\|_v}{\|\widetilde{s}\|_{v,\sup}} \leq \exp(-th_{\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(1)}(\pi^{-1}(x))/[L_w : \mathbb{Q}_w])$$
$$\forall w \in \mathscr{P},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \forall \widetilde{s} \in ((\mathscr{F}_w^t\widetilde{W}) \otimes_L \mathbb{C}_w) \setminus \{0\}.$$

D'après le cas précédent, ces points sont en nombre fini car chaque point $x \in X_L \setminus Z$ admet un unique antécédent par π.

□

3.7. Commentaires sur la démonstration du théorème 3.1.1

Afin de ne pas alourdir la démonstration du théorème 3.1.1 que nous venons de présenter, nous avons fait le choix de ne pas expliciter les constantes qui interviennent dans les paragraphes précédents, bien que cela aurait été relativement aisé. Cela demande néanmoins d'établir une version complètement explicite du théorème du produit de Faltings 3.3.1. Comme nous l'avons signalé au paragraphe 3.3, de nombreuses versions effectives de ce théorème figurent dans la littérature pour le cas d'un produit d'espaces projectifs. À notre connaissance, la seule version complètement effective du théorème du produit qui considère le cas de variétés projectives quelconques se trouve dans un travail non publié (et difficilement accessible) de Ferretti [**30**]. Elle se déduit facilement d'un théorème du produit effectif usuel au moyen de bonnes projections. Une fois rendue explicite, notre démonstration pourrait conduire à de nouvelles versions quantitatives du théorème de Faltings et Wüstholz, qu'il serait intéressant de comparer avec celles qu'ont démontrées Ferretti [**29**] et Evertse et Ferretti [**23**].

Nous allons terminer ce chapitre en nous intéressant de plus près au rôle joué par la notion de semi-stabilité dans la démonstration du théorème 3.1.1. Conservons les notations du paragraphe 3.6. Rappelons que δ désigne un nombre réel vérifiant

$$0 < \delta < \sum_{w\in\mathscr{P}} \mu_w(V) - [L : \mathbb{Q}],$$

et que si Y est une sous-variété produit de $X_L^{(m)}$, on a défini l'espace vectoriel $W_{\mathbf{d}}(Y)$ par

$$W_{\mathbf{d}}(Y) = \bigcap_{w\in\mathscr{P}} \mathscr{F}_w^{\mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(Y)-m\delta}\Gamma_{\mathbf{d}}(Y).$$

(voir le paragraphe 3.5.2). Dans ce qui suit, on suppose également que $\delta \leq \min_{w\in\mathscr{P}} c_{w,e_w}/2$. Dans la démonstration de la proposition 3.6.2, l'hypothèse de semi-stabilité permet de garantir qu'à chaque étape de récurrence j, l'inégalité

$$\sum_{w\in\mathscr{P}}(\mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(Y^{(j)})-m\delta)\geq\sum_{w\in\mathscr{P}}(\mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(X_L^{(m)}))-m\delta)=m\left(\sum_{w\in\mathscr{P}}\mu_w(V)-\delta\right). \tag{29}$$

soit vérifiée. La proposition 3.5.5 permet de construire une section s de petite hauteur dans $W_{\mathbf{d}}(Y^{(j)})\setminus\{0\}$. L'inégalité (29) et le choix de δ permettent d'appliquer la proposition 3.5.6 avec un choix de nombres réels $(t_w)_{w\in\mathscr{P}}$ suffisamment grands pour montrer que l'indice de s en x est supérieur à $m\varepsilon$. C'est ce qui permet d'appliquer le théorème du produit de Faltings. Pour appliquer la proposition 3.5.6, nous pourrions nous contenter de construire, à chaque étape de la récurrence, une section non nulle s de petite hauteur dans

$$\bigcap_{w\in\mathscr{P}}\mathscr{F}_w^{\mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(X_L^{(m)}))-m\delta}\Gamma_{\mathbf{d}}(Y^{(j)})=W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})/(I_{\mathbf{d}}(Y^{(j)})\cap W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})),$$

où $I_{\mathbf{d}}(Y^{(j)})=\mathrm{H}^0(X_L^{(m)},I_{Y^{(j)}}\otimes\mathscr{O}_{X^{(m)}}(\mathbf{d}))$ désigne l'espace vectoriel des polynômes multihomogènes de degré $\mathbf{d}$ s'annulant identiquement sur $Y^{(j)}\times_K\operatorname{Spec}(L)$. Ceci peut se faire au moyen du lemme de Siegel avec contraintes (théorème 1.1.23), qui fournit une section de petite hauteur dans $W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})\setminus(I_{\mathbf{d}}(Y^{(j)})\cap W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)}))$. Cette construction ne nécessite pas d'hypothèse de semi-stabilité ; en contrepartie, nous devons garantir une inégalité du type

$$\dim(W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)}))\geq(1+\varepsilon)(I_{\mathbf{d}}(Y^{(j)})\cap W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})).$$

Nous allons illustrer ce point de vue en démontrant le théorème 3.7.1 ci-dessous. Il s'agit en quelque sorte de l'énoncé « brut » que l'on obtient en appliquant rigoureusement les étapes que nous venons d'esquisser. En conséquence, l'intérêt de la fin de ce paragraphe réside probablement plus dans la démonstration du théorème 3.7.1 que dans son énoncé. L'approfondissement et le raffinement de ces techniques feront l'objet d'un travail ultérieur.

Rappelons que $V=\Gamma_1(X)=\mathrm{H}^0(X_L,\mathscr{O}_{X_L}(1))$ et que les solutions du système d'inégalités (21) sont les points $y\in X(K)$ vérifiant

$$\frac{\|s(y)\|_w}{\|s\|_{w,\sup}}\leq\exp(-th(y)/[L_w:\mathbb{Q}_w])\ \ \forall w\in\mathscr{P},\ \forall t\in\mathbb{R},\ \forall s\in(\mathscr{F}_w^tV\otimes_L\mathbb{C}_w)\setminus\{0\}.$$

Si Z est une sous-variété de X_L, on note

$$\kappa(Z)=\min\{k\in\mathbb{N}\mid\Gamma_k(Z)\text{ est un quotient de }\Gamma_k(X)=S^kV\}.$$

THÉORÈME 3.7.1. *Supposons que l'on ait $\sum_{w\in\mathscr{P}}\mu_w(V)>[L:\mathbb{Q}]$. Soit m un entier strictement supérieur à*

$$\frac{3\max_{w\in\mathscr{P}}c_{w,e_w}^2\log(\operatorname{card}(\mathscr{P}))}{4\delta^2}$$

et soit ε un nombre réel vérifiant

$$0<\varepsilon<\frac{\sum_{w\in\mathscr{P}}\mu_w(V)-[L:\mathbb{Q}]}{([L:\mathbb{Q}]+\sum_{w\in\mathscr{P}}c_{w,e_w})}.$$

Il existe un nombre réel $r(\varepsilon)>1$ ne dépendant que de m, n, ε, et une constante $c_{15}(\varepsilon)$ vérifiant la propriété suivante. Soit $x=(x_1,\dots,x_m)\in X_L^{(m)}(K)$ une famille de solutions du système (21) *telle que*

- *$h(x_1)\geq c_{15}(\varepsilon)$;*
- *$h(x_{i+1})\geq(1+\varepsilon)r(\varepsilon)h(x_i)\ \ \forall\ i\in\{1,\dots,m-1\}$.*

Alors il existe un produit $Y=Y_1\times_L\cdots\times_L Y_m\subsetneq X_L^{(m)}$ de variétés géométriquement irréductibles définies sur L, contenant x, avec $\deg Y_i\leq c_{15}(\varepsilon)$, $\dim Y_i\geq1$ pour tout $i\in\{1,\dots,m\}$, et vérifiant

$$1\leq\frac{\dim W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})}{\dim(I_{\mathbf{d}}(Y)\cap W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)}))}<1+\varepsilon$$

pour tout m-uplet d'entiers naturels non nuls $\mathbf{d}=(d_1,\dots,d_m)$ tel que

$$\forall\ i\in\{1,\dots,m\},\quad d_1h(x_1)\leq d_ih(x_i)\leq(1+\varepsilon)d_1h(x_1)\ \textit{et}\ d_i\geq\kappa(Y_i).$$

Démonstration : Soit $r(\varepsilon)$ le nombre réel du théorème du produit 3.3.1. Considérons un m-uplet $x = (x_1, \dots, x_m)$ de points de $X(K)$ vérifiant le système d'inégalités (21) tel que

$$\forall\ i \in \{1, \dots, m-1\},\ h(x_{i+1}) \geq (1+\varepsilon) r(\varepsilon) h(x_i).$$

Nous devons montrer qu'il existe une constante $c_{15}(\varepsilon)$ telle que : si pour tout produit de sous-variétés géométriquement irréductibles $Y = Y_1 \times_L \cdots \times_L Y_m \subsetneq X_L^{(m)}$ contenant x, avec $\deg Y_i \leq c_{15}(\varepsilon)$, $\dim Y_i \geq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe $\mathbf{d} \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$ satisfaisant les conditions de l'énoncé tel que

$$\frac{\dim W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})}{\dim(I_{\mathbf{d}}(Y) \cap W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)}))} \geq 1 + \varepsilon,$$

alors $h(x_1) \leq c_{15}(\varepsilon)$. Soit $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$ tel que

$$\forall\ i \in \{1, \dots, m\},\quad d_1 h(x_1) \leq d_i h(x_i) \leq (1+\varepsilon) d_1 h(x_1). \tag{30}$$

En particulier, on a $d_i/d_{i+1} \geq r(\varepsilon)$ pour tout entier $1 \leq i \leq m$. Remarquons que pour tout entier naturel k non nul, le m-uplet $k\mathbf{d} = (kd_1, \dots, kd_m)$ vérifie également (30). D'après la proposition 1.1.16 page 32, il existe une constante c et une section non nulle s dans $W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})$ telle que

$$h(s) \leq \lambda_1(W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)}) \leq c(d_1 + \cdots + d_m) - \widehat{\mu}_{\max}(W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)}) \leq c(d_1 + \cdots + d_m) - \widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)}).$$

Par ailleurs, la proposition 3.5.5 donne la minoration

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})) \geq -c_6(d_1 + \cdots + d_m), \tag{31}$$

où c_6 est une constante indépendante de x. On en déduit qu'il existe une constante c' telle que $h(s) \leq c'(d_1 + \cdots + d_m)$. Rappelons que $W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})$ est défini par

$$W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)}) = \bigcap_{w \in \mathscr{P}} \mathscr{F}_w^{t_w} \Gamma_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)}),$$

où $t_w = \mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(X_L^{(m)}) - m\delta$ pour toute place $w \in \mathscr{P}$. On a donc

$$\sum_{w \in \mathscr{P}} t_w = \sum_{w \in \mathscr{P}} (\mathbb{E}_{\mathbf{d},w}(X_L^{(m)}) - m\delta) = m \sum_{w \in \mathscr{P}} (\mu_w(V) - \delta) > m[L : \mathbb{Q}].$$

D'après la proposition 3.5.6, il existe une constante c_{10} indépendante de x telle que si $h(x_1) \geq c_{10}$, alors l'indice de s en x est supérieur à $m\varepsilon$. Le théorème du produit 3.3.1 entraîne alors que le point x appartient à un produit $Y^{(1)} = Y_1^{(1)} \times_L \cdots \times_L Y_m^{(1)} \subsetneq X_L^{(m)}$ de sous-variétés géométriquement irréductibles de X_L vérifiant

$$\sum_{i=1}^{m} d_i h(Y_i^{(1)}) \leq c(1)(d_1 + \cdots + d_m) \ \text{ et } \ \forall\ i \in \{1, \dots, m\},\ \deg(Y_i) \leq c(1)$$

pour une certaine constante $c(1)$. S'il existe un entier $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $\dim Y_i^{(1)} = 0$, alors $Y_i^{(1)}$ est le singleton $\{x_i\}$. Dans ce cas, on a

$$d_1 h(x_1) \leq d_i h(x_i) = d_i h(Y_i^{(1)}) \leq \sum_{j=1}^{m} d_j h(Y_j^{(1)}) \leq c(1)(d_1 + \cdots + d_m) \leq mc(1) d_1,$$

donc $h(x_1) \leq mc(1)$. On peut donc supposer que $\dim Y_i^{(1)} \geq 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, puis que $\mathbf{d}$ vérifie : $d_i \geq \kappa(Y_i^{(1)})$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et

$$\frac{\dim W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})}{\dim(I_{\mathbf{d}}(Y^{(1)}) \cap W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)}))} \geq 1 + \varepsilon. \tag{32}$$

Nous allons maintenant appliquer le théorème 1.1.23 page 34 avec $E := W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})$ et $E_1 := I_{\mathbf{d}}(Y^{(1)}) \cap W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})$, $\ell_1 = \dim E_1$ et $\ell = \dim E$. D'après l'inégalité (32), on a

$$\frac{\ell_1 - 1}{\ell - \ell_1 + 1} \leq \frac{\ell_1}{\ell - \ell_1} = \frac{\dim E_1}{\dim E - \dim E_1} \leq \frac{\dim E_1}{\varepsilon \dim E_1} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

D'après l'inégalité (31) et la majoration

$$\ell = \dim(W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})) \leq \dim(\Gamma_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})) \leq \exp((d_1 + \cdots + d_m)\log(\dim V))$$

il existe une constante c_6' telle que

$$H = ((41\ell)^{[K:\mathbb{Q}]}|D_K|)^{1/2} \exp\left(-[K:\mathbb{Q}]\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)}))\right) \leq \exp(c_6'(d_1 + \cdots + d_m)).$$

D'après le paragraphe 3.5.3 (étape 2), il existe une constante c telle que

$$\widehat{\mu}_{\max}(\Gamma_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})) \leq c(d_1 + \ldots + d_m).$$

En appliquant la proposition 1.1.16, on en déduit qu'il existe une constante c' telle que

$$\lambda_1(E_1) \geq \lambda_1(\Gamma_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})) \geq -c'(d_1 + \cdots + d_m).$$

On a également $\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(E_1) \leq \widehat{\mu}_{\max}(\Gamma_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})) \leq c(d_1 + \ldots + d_m)$. D'après le théorème 1.1.23, on en déduit qu'il existe une constante c'' et une section $s \in W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)}) \setminus (I_{\mathbf{d}}(Y^{(1)}) \cap W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)}))$ telle que $h(s) \leq c''(d_1 + \cdots + d_m)$. En notant $s_{|Y^{(1)}}$ la classe d'équivalence de s dans

$$\frac{W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})}{I_{\mathbf{d}}(Y^{(1)}) \cap W_{\mathbf{d}}(X_L^{(m)})} \subset \Gamma_{\mathbf{d}}(Y)$$

(rappelons que $d_i \geq \kappa(Y_i^{(1)})$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$), on a $s_{|Y^{(1)}} \neq 0$ et

$$h(s_{|Y^{(1)}}) \leq h(s) \leq c''(d_1 + \cdots + d_m).$$

En appliquant la proposition 3.5.6 (avec $c_9 = \max\{c(1), c''\}$), on en déduit qu'il existe une constante c_{10}' si $h(x_1) \geq c_{10}'$, alors l'indice de la section $s_{|Y^{(1)}}$ est supérieur à $m\varepsilon$. D'après le théorème du produit 3.3.1, il existe une sous-variété stricte $Y^{(2)} = Y_1^{(2)} \times_L \cdots \times_L Y_m^{(2)}$ de $Y^{(1)}$ et une constante $c(2)$ vérifiant : $\deg(Y_i) \leq c(2)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$, et

$$\sum_{i=1}^{m} d_i h(Y_i^{(2)}) \leq c(2)(d_1 + \cdots + d_m).$$

S'il existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\dim Y_i^{(2)} = 0$, alors on montre comme précédemment que $h(x_1) \leq c(2)$. Sinon, on répète le raisonnement précédent. Finalement, on montre qu'il existe une constante c' telle que $h(x_1) \leq c'$, ce qui achève la preuve.

□

Remarque 3.7.2. D'après la preuve du lemme 3.1.2, le théorème 3.7.1 reste vrai en remplaçant le système d'inégalités (21) par le système (15) (page 49).

Supposons que X_L soit une courbe irréductible géométriquement irréductible. Si $Y = Y_1 \times \cdots \times_L Y_m \subsetneq X_L^{(m)}$ est un produit de sous-variétés géométriquement irréductibles de $X_L^{(m)}$, il existe un entier $i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\dim Y_i = 0$. Le théorème 3.7.1 et le théorème 1.3.8 de Northcott entraînent donc immédiatement le corollaire suivant.

Corollaire 3.7.3. *Supposons que X_L est une courbe géométriquement irréductible et que $\sum_{w \in \mathscr{P}} \mu_w(V) > [L:\mathbb{Q}]$. Alors il n'existe qu'un nombre fini de points $x \in X(K)$ solutions de* (15).

En particulier, ce corollaire s'applique si $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ et si $\sum_{w \in \mathscr{P}} \mu_w(V) > [L:\mathbb{Q}]$. On en déduit qu'il implique le théorème de Roth avec les mêmes arguments qu'à la page 50.

Chapitre 4

Une généralisation effective du théorème de Liouville

4.1. Introduction

Soit x un nombre réel algébrique de degré $d \geq 2$ sur $\mathbb{Q}$. Rappelons que dans sa version effective, le théorème de Liouville (voir par exemple [**45**, D.3]) fournit une constante explicite $c(x) > 0$ telle que pour tout $p/q \in \mathbb{Q}$, on ait

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c(x)}{q^d}. \tag{33}$$

En particulier, pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ et pour tout nombre rationnel p/q tel que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{d+\varepsilon}},$$

on a $q \leq c(x)^{-1/\varepsilon}$. Dans ce chapitre, nous cherchons à généraliser ce résultat aux points fermés d'une variété projective. McKinnon et Roth démontrent des généralisations du théorème de Roth et du théorème de Liouville sur une variété projective de dimension quelconque dans leurs articles [**56**] et [**57**] respectivement. L'article [**56**] utilise le théorème de Faltings et Wüstholz (théorème 2.0.1 de la page 49), tandis que la démonstration de l'analogue du théorème de Liouville repose sur des méthodes différentes (que nous rappellerons dans la partie 4.3). Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K, x un point fermé algébrique de X et $\mathscr{L}$ un fibré inversible nef sur X auquel on associe une fonction de hauteur $h_{\mathscr{L}}$ sur les points de $X(\overline{K})$. On note L le corps de définition de x. On fixe une place v de L et une fonction distance d_v sur X donnée par un plongement $\iota \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ (définie à la page 83). On note $\pi \colon \widetilde{X} \to X \times_K \operatorname{Spec}(L)$ l'éclatement en x et E le diviseur exceptionnel. Le théorème 3.3 de [**57**] donne la généralisation suivante du théorème de Liouville, dans laquelle intervient le lieu de base stable d'un fibré inversible (nos normalisations de la hauteur et de la distance diffèrent de celles de [**57**] ; voir la remarque 4.2.1 et la discussion qui suit à ce sujet).

Théorème 4.1.1 (McKinnon et Roth, 2016). *Soit $\gamma > 0$ un nombre rationnel tel que $\mathscr{L}_\gamma := \pi^*\mathscr{L} - \gamma E$ soit dans le cône effectif de $\operatorname{Pic}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{X})$. On note $\mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma)$ le lieu de base stable de $\mathscr{L}_\gamma$ et $\mathscr{B} = \pi(\mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma))$. Il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout point $y \in (X \setminus \mathscr{B})(K)$ distinct de x, on a*

$$\log(d_v(x,y)) \geq -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{[L_v:\mathbb{Q}_v]\gamma} \right) h_{\mathscr{L}}(y) + M.$$

Dans l'article [**57**], la constante M qui apparaît dans ce théorème n'est pas effective. Dans le paragraphe 4.3, nous verrons comment adapter les méthodes de [**57**] afin de l'expliciter, pour obtenir une version effective du théorème 4.1.1 (théorème 4.3.2). Cette constante dépend de X, L, $\mathscr{L}$, x et γ, mais également d'un choix de métriques sur le fibré inversible $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)$ associé au diviseur exceptionnel E sur l'éclatement $\widetilde{X}$. Dans un second temps, nous montrerons comment obtenir des bornes qui ne dépendent pas d'un tel choix quand le point x est régulier. Cette seconde approche repose sur des méthodes différentes, inspirées de [**56**]. Nous commencerons par donner une démonstration rapide du théorème de Faltings et Wüstholz dans le cas particulier où $\operatorname{card}(\mathscr{P}) = 1$ (voir le paragraphe 4.4), avec des hypothèses moins restrictives sur le fibré considéré : notre preuve est valable pour un fibré inversible ample (non nécessairement très ample) muni d'une métrique adélique quelconque (au sens de la définition 1.3.3 page 36). Elle consiste à trouver un majorant de la hauteur des points satisfaisant le système d'inégalités (15) du théorème 2.0.1 (page 49). La propriété de Northcott (théorème 1.3.8 page 38) permet alors de conclure. Cette démonstration a l'avantage de fournir à la fois un lieu de base explicite en dehors duquel il n'y a qu'un nombre fini de solutions, et de donner une majoration explicite de leur hauteur. Cette nouveauté sera le point clé qui nous permettra de démontrer une nouvelle généralisation effective du théorème de Liouville dans la partie 4.5. Reprenons les notations introduites avant le théorème 4.1.1. Concrètement, pour tout nombre rationnel $\gamma > 0$ nous donnerons une constante explicite $a(\mathscr{L}, x, \gamma)$ et nous démontrerons le théorème suivant (théorème 4.5.2, corollaire 4.5.4 et remarque 4.5.5) :

THÉORÈME 4.1.2. *Supposons que le point x est régulier. Soit $\gamma > 0$ un nombre rationnel tel que $\mathscr{L}_\gamma := \pi^*\mathscr{L} - \gamma E$ soit dans le cône effectif de* $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{X})$. *On note $\mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma)$ le lieu de base stable de $\mathscr{L}_\gamma$ et $\mathscr{B} = \pi(\mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma))$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, tous les points $y \in (X \setminus \mathscr{B})(K)$ distincts de x satisfaisant l'inégalité*

$$\log(d_v(x,y)) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{[L_v:\mathbb{Q}_v]\gamma} + \varepsilon\right) h_{\mathscr{L}}(y)$$

vérifient

$$h_{\mathscr{L}}(y) < \frac{1}{\varepsilon} a(\mathscr{L}, x, \gamma).$$

Afin d'appliquer les résultats de la partie 4.4, nous devrons comparer les normes de sections de $\mathscr{L}$ et la fonction distance comme dans l'article [**56**]. Pour obtenir un résultat effectif, nous serons amenés à introduire une quantité $\rho_x(\mathscr{L}, \iota)$ dépendant de x, $\mathscr{L}$ et du plongement ι fixé (voir le paragraphe 4.5). La constante $a(\mathscr{L}, x, \gamma)$ dépend de L et fait intervenir la quantité $\rho_x(\mathscr{L}, \iota)$. Elle est indépendante d'un choix de métrique sur $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)$.

Notons $\epsilon_x(\mathscr{L})$ la constante de Seshadri en x (définie au paragraphe 4.3). Le théorème 4.1.2 permet de fournir une constante explicite $b(x, \mathscr{L})$ dans le corollaire suivant. Ce résultat peut s'interpréter comme une version effective du corollaire 3.6 de [**57**] dans le sens où il donne une majoration explicite de la hauteur des solutions.

COROLLAIRE 4.1.3. *Si $\mathscr{L}$ est ample, alors pour tout $\varepsilon > 0$, tous les points $y \in X(K)$ distincts de x satisfaisant l'inégalité*

$$\log(d_v(x,y)) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{[L_v:\mathbb{Q}_v]\epsilon_x(\mathscr{L})} + \varepsilon\right) h_{\mathscr{L}}(y)$$

vérifient

$$h_{\mathscr{L}}(y) \leq \frac{1}{\varepsilon} b(\mathscr{L}, x).$$

En particulier ces points sont en nombre fini.

Enfin, nous généraliserons l'inégalité (33) au cas de l'espace projectif $\mathbb{P}^n_K$ muni du fibré $\mathscr{O}(1)$ (paragraphe 4.5.2). Dans le cas où $n \geq 2$ et $K \neq L$, nous verrons qu'il est possible d'améliorer l'exposant $\frac{[L:\mathbb{Q}]}{[L_v:\mathbb{Q}_v]}$.

Nous commencerons par introduire la notion de distance sur une variété projective (§ 4.2). Dans le paragraphe 4.3, nous montrons comment adapter les arguments de [**57**] pour expliciter la constante M du théorème 4.1.1. Le paragraphe 4.4 est consacré à la démonstration d'une version effective du théorème de Faltings et Wüstholz dans le cas d'une place. Nous utiliserons ce résultat dans la dernière partie pour démontrer le théorème 4.1.2, en obtenant une constante indépendante d'un choix de métriques sur $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)$. Le cas particulier de l'espace projectif $\mathbb{P}^n_K$ est traité dans le paragraphe 4.5.2.

Signalons que dans un travail récent [**31**], Gasbarri étudie les points transcendants d'une variété projective définie sur un corps de nombres vérifiant une inégalité similaire à l'inégalité de Liouville. Si le problème étudié ici est différent, un outil commun avec [**31**] est la comparaison récurrente des normes de sections d'un fibré inversible et de la hauteur de points d'une variété projective. Cet outil, qui découle facilement des définitions, est très classique en approximation diophantienne et il est par exemple au coeur de la démonstration de l'inégalité de Liouville classique ([**45**, D.3.3]).

4.2. Distance sur une variété projective et constante d'approximation.

Soit K un corps de nombres. On considère ici une variété projective X définie sur $\operatorname{Spec}(K)$ et un plongement $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$. Nous allons introduire une notion de distance pour les points fermés de X relativement à une place de K. On fixe une place v_0 de K et une extension de v_0 à $\overline{K}$, notée v. Si v_0 est archimédienne, on définit une fonction distance sur $X(\mathbb{C}) \times X(\mathbb{C})$ en tirant en arrière la fonction sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ donnée par

$$d_v(x,y) = \left(1 - \frac{|\sum_{i=0}^n x_i \overline{y_i}|_v^2}{(\sum_{i=0}^n |x_i|_v^2)(\sum_{i=0}^n |y_i|_v^2)}\right)^{1/2}.$$

Si v_0 est une place finie, on définit une fonction distance sur $X(\mathbb{C}_v) \times X(\mathbb{C}_v)$ en tirant en arrière la fonction sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}_v) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_v)$ définie par

$$d_v(x,y) = \frac{\max_{0 \le i < j \le n} |x_i y_j - x_j y_i|_v}{\max_{0 \le i \le n} |x_i|_v \max_{0 \le j \le n} |y_j|_v}.$$

Remarque 4.2.1. Il est important de noter que la distance que nous avons défini n'est pas normalisée de la même façon que la distance introduite par McKinnon et Roth. En effet, si l'on note d_v^{MR} la distance définie dans [**56**, page 522] et [**57**, page 931], on a l'égalité $d_v^{\mathrm{MR}} = d_v^{[K_v:\mathbb{Q}_v]}$. Par ailleurs, signalons que les fonctions de hauteur d'un point $y \in X(K)$ considérées par McKinnon et Roth ne sont pas normalisées par le degré du corps de nombres $[K:\mathbb{Q}]$. Il convient donc d'être vigilant en comparant les résultats de ce chapitre avec ceux de [**57**].

Soit L une extension finie de K et soit $x \in X(L)$. Considérons un fibré inversible $\mathscr{L}$ ample sur X. Afin de faciliter la comparaison des résultats de ce chapitre avec ceux de [**57**], nous allons maintenant donner une définition explicite de la constante d'approximation $\alpha_x(\mathscr{L})$ de McKinnon et Roth ([**57**, § 2]) correspondant à nos normalisations. Supposons que le fibré $\mathscr{L}$ est muni d'une métrique adélique et notons $h_{\mathscr{L}}$ la fonction de hauteur associée (voir le paragraphe 1.3.3). Fixons une place v de L et supposons que $L_v = K_v$ (cette hypothèse correspond à la remarque 2.7 page 933 de [**57**]). On définit alors $\tau_x(\mathscr{L})$ comme étant l'unique nombre nombre réel étendu $\tau_x(\mathscr{L}) \in [0, +\infty]$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, l'inéquation

$$\log d_v(x,y) < -\left(\frac{[K:\mathbb{Q}]}{[L_v:\mathbb{Q}_v]}\tau_x(\mathscr{L}) + \varepsilon\right) h_{\mathscr{L}}(y)$$

n'ait qu'un nombre fini de solutions $y \in X(K)$. On pose alors $\alpha_x(\mathscr{L}) = 1/\tau_x(\mathscr{L})$. Cette définition correspond exactement à celle donnée à la page 932 de [**57**], en prenant en compte les différences de normalisations. En considérant le fibré inversible $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}}$ muni de la métrique de l'exemple 1.3.4 (page 36), les théorèmes de Roth et de Liouville s'écrivent respectivement $\alpha_x(\mathscr{L}) \ge 1/2$ et $\alpha_x(\mathscr{L}) \ge 1/[L:\mathbb{Q}]$.

Remarque 4.2.2. Dans leurs articles [**56**] et [**57**], les auteurs considèrent une fonction hauteur définie comme dans l'exemple 1.3.7 page 38 (aux différences de normalisation près). Dans ce chapitre, nous considérerons une métrique adélique quelconque sur le fibré inversible $\mathscr{L}$ considéré. En plus d'être plus général, ce point de vue a l'avantage d'être particulièrement adapté pour rendre effectifs les arguments de McKinnon et Roth, comme nous allons le voir dans le paragraphe 4.3 (voir la remarque 4.3.3).

4.3. L'approche de McKinnon et Roth

Dans ce paragraphe, nous montrons comment adapter la démonstration du théorème 3.3 de McKinnon et Roth présentée dans l'article [**57**] pour obtenir un résultat effectif. Soit X une variété projective définie sur un corps de nombres K, L une extension finie de K, v une place de L et $x \in X(L)$ un point fermé. Soit $\mathscr{L}$ un fibré inversible nef sur X. On note $X_L = X \times_K \operatorname{Spec}(L)$, $\pi\colon \widetilde{X} \to X_L$ l'éclatement de X_L en x et E le diviseur exceptionnel associé. Soit $\iota\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_K$ un plongement et d_v la distance associée (définie dans la partie 4.2). Par abus de notation, nous confondrons souvent le diviseur E avec l'élément $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E) \in \operatorname{Pic}(\widetilde{X})$

associé, et nous noterons additivement la loi de groupe sur $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{X})$ (voir le paragraphe 1.2). La constante de Seshadri $\epsilon_x(\mathscr{L})$, définie par Demailly en 1990 (voir [**18**, § 6]), est égale à la quantité

$$\epsilon_x(\mathscr{L}) = \sup\{\gamma \in \mathbb{Q} \mid \pi^*\mathscr{L} - \gamma E \text{ est nef}\}.$$

Dans la suite, pour tout rationnel positif γ, on notera $\mathscr{L}_\gamma = \pi^*\mathscr{L} - \gamma E \in \mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{X}) = \mathrm{Pic}(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Si $\mathscr{L}$ est très ample, alors $\epsilon_x(\mathscr{L}) \geq 1$, et si $\mathscr{L}$ est très ample alors $\epsilon_x(\mathscr{L}) > 0$ (voir par exemple [**56**, Proposition 3.4 (d)]). Par ailleurs, si $\mathscr{L}$ est ample, alors $\mathscr{L}_\gamma$ est ample pour tout nombre rationnel $\gamma \in]0, \varepsilon_x(\mathscr{L})[$. Cette propriété apparaît dans l'article fondateur de Demailly [**18**, page 98] (voir à ce sujet la discussion qui suit la définition 2.9 de l'article [**57**] de McKinnon et Roth).

On peut associer à $\mathscr{L}$ une fonction de hauteur comme dans le théorème B.3.2 de [**45**]. Dans le lemme 3.1 de [**57**], les auteurs définissent une métrique sur $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)$ de la façon suivante. Soit $Z_0, \ldots, Z_n$ un choix de coordonnées sur $\mathbb{P}^n_K$, ϕ un plongement de X dans $\mathbb{P}^n_K$ tel que $\phi(x) = (1 : 0 : \ldots : 0)$ et d'_v la distance associée à ϕ. On note $\widetilde{\mathbb{P}}^n$ l'éclatement de $\mathbb{P}^n$ en $\phi(x) = (1 : 0 : \ldots : 0)$ et E' le diviseur exceptionnel. Par la propriété universelle de l'éclatement, il existe un morphisme $\widetilde{\phi}\colon \widetilde{X} \to \widetilde{\mathbb{P}}^n$ tel que $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E) = \widetilde{\phi}^*\mathscr{O}_{\widetilde{\mathbb{P}}^n}(E')$. Le fibré $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathbb{P}}^n}(E')$ est la restriction de $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}}(1, -1)$ à $\widetilde{\mathbb{P}}^n$. La métrique sur $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)$ est alors définie comme la restriction des métriques sur $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}}(1, -1)$ associées au choix de coordonnées $Z_0, \ldots, Z_n$ (remarquons que cette métrique confère une structure de fibré adélique à $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)$). On dispose alors d'une formule explicite pour la hauteur $h_{\overline{\mathscr{O}(E)}}$ associée, que l'on notera plus simplement h_E : pour tout $z \in X(L_v) \setminus \{x\}$,

$$h_E(z) = \sum_{v \in \Sigma_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]} \log\left(\frac{\max_{0 \leq i \leq n} |Z_i(\phi(z))|_v}{\max_{1 \leq i \leq n} |Z_i(\phi(z))|_v}\right)$$

(voir [**57**, page 936] ; remarquons que notre normalisation des hauteurs et de la distance diffère de celle de [**57**]). D'après la preuve du lemme 3.1 de [**57**], l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $z \in X(L_v) \setminus \{x\}$:

$$h_E(z) \geq -\frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]}(a(v) \log 2 + \log d'_v(x, z)),$$

où $a(v) = 1$ si v est archimédienne et $a(v) = 0$ sinon. De plus, d'après la proposition 2.4 de [**56**], deux plongements distincts induisent des distances équivalentes. Il existe donc une constante c telle que

$$h_E(z) \geq -\frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]}(a(v) \log 2 + c + \log d_v(x, z))$$

pour tout point $z \in X(K)$. Soit γ un nombre rationnel strictement positif tel que $\mathscr{L}_\gamma$ soit dans le cône effectif de $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{X})$. Soit m un entier non nul tel que $m\gamma \in \mathbb{N}$. D'après le théorème B.3.2 de [**45**] et la proposition 2.1.21 de [**52**], il existe une constante c_γ telle que $h_{m\mathscr{L}_\gamma}(y) \geq c_\gamma$ pour tout point $y \in X \setminus (\pi(\mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma)))(K)$. On a ainsi

$$\begin{aligned} c_\gamma < h_{m\mathscr{L}_\gamma}(y) &= mh_{\mathscr{L}}(y) - m\gamma h_E(y) \\ &\leq mh_{\mathscr{L}}(y) + m\gamma\frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]}(a(v) \log 2 + c + \log d_v(x, y)), \end{aligned}$$

d'où

$$\log(d_v(x, y)) > \frac{[L : \mathbb{Q}]}{m\gamma[L_v : \mathbb{Q}_v]}c_\gamma - c - a(v) \log 2 - \frac{[L : \mathbb{Q}]}{\gamma[L_v : \mathbb{Q}_v]}h_{\mathscr{L}}(y),$$

ce qui démontre le théorème 4.1.1. Pour obtenir une version effective de ce théorème, il suffit d'expliciter les constantes c et c_γ. Comme la métrique sur le fibré $\mathscr{L}$ est adélique, on a l'inégalité $h_{m\mathscr{L}_\gamma}(y) \geq \inf\{h_{m\mathscr{L}_\gamma}(z) \mid z \in (\widetilde{X} \setminus \mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma)(K)\} > -\infty$ pour tout point

$y \in X \setminus (\pi(\mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma)))(K)$ (voir le paragraphe 1.5.1). On peut donc poser

$$\begin{aligned} c_\gamma &= \inf\{h_{m\mathscr{L}_\gamma}(z) \mid z \in (\widetilde{X} \setminus \mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma))(K)\} \\ &= m \inf\{h_{\mathscr{L}}(\pi(z)) - \gamma h_E(z) \mid z \in (\widetilde{X} \setminus \mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma))(K)\} \end{aligned}$$

(voir aussi la remarque 4.3.3 ci-dessous). Il reste maintenant à expliciter la constante c. C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 4.3.1. *Si v est archimédienne, alors pour tout $x' \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_v)$ il existe un plongement $\iota' \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ envoyant x sur x' et définissant une distance d'_v vérifiant : $d'_v(x,y) = d_v(x,y)$ pour tout $y \in X(\mathbb{C}_v)$.*

Si v est ultramétrique, alors pour tout $x' \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}_v)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un plongement $\iota'_\varepsilon \colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ envoyant x sur x' et définissant une distance d'_v vérifiant

$$(1+\varepsilon)^{-1} d_v(x,y) \leq d'_v(x,y) \leq (1+\varepsilon) d_v(x,y)$$

pour tout $y \in X(\mathbb{C}_v)$.

Démonstration : Supposons que v est archimédienne ; alors $\iota(x)$ appartient à $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. On choisit un représentant $\widetilde{x}$ de $\iota(x)$ dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ tel que $|\widetilde{x}|_{2,v} = 1$, où la norme $|.|_{2,v}$ est définie par $|(z_0,\dots,z_n)|_{2,v} = (\sum_i |z_i|_v^2)^{1/2}$, associée au choix de coordonnées défini par ι. On construit une base orthonormée $\mathrm{u} = (x, u_1, \dots, u_n)$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit $x' \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ tel que $|x'|_{2,v} = 1$. De la même façon on construit une base orthonormée $\mathrm{v} = (x', v_1, \dots, v_n)$. Il existe un unique automorphisme unitaire T de $\mathbb{C}^{n+1}$ envoyant la base u sur v. Cet automorphisme induit un changement de coordonnées ϕ sur $\mathbb{P}^n$ tel que $\phi(x) = x'$. On note $\iota' = \phi \circ \iota$ et d'_v la distance associée. On a bien $d_v(x,y) = d'_v(x,y)$ pour tout $y \in X(K_v)$ puisque T est unitaire.

Supposons maintenant que v est ultramétrique. Soit $\varepsilon > 0$ et ε' tel que $(1+\varepsilon)^{-1} \leq (1-\varepsilon')^2$. Soit $\widetilde{x}$ un représentant de $\iota(x)$ dans $\mathbb{C}_v^{n+1} \setminus \{0\}$ tel que $|\widetilde{x}|_{2,v} = 1$, $x' \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ tel que $|x'|_{2,v} = 1$, et soit $\varepsilon \in]0,1[$. D'après la proposition 1.1.5 page 28, on peut construire des bases $(\widetilde{x}, u_1, \dots, u_n)$ et $(x', u'_1, \dots, u'_n)$ de $\mathbb{C}_v^{n+1}$ avec $|u_i|_{2,v} = |u'_i|_{2,v} = 1$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et telles que pour tout $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}_v^n$,

$$|\lambda_0 \widetilde{x} + \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i|_{2,v} \geq (1-\varepsilon') \max_{0 \leq i \leq n} |\lambda_i|_v$$

et

$$|\lambda_0 x' + \sum_{i=1}^n \lambda_i u'_i|_{2,v} \geq (1-\varepsilon') \max_{0 \leq i \leq n} |\lambda_i|_v.$$

Soit T_ε l'automorphisme de $\mathbb{C}_v^{n+1}$ tel que $T_\varepsilon(\widetilde{x}) = x'$ et $T_\varepsilon(u_i) = u'_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On note $\iota'_\varepsilon = T_\varepsilon \circ \iota \colon X \to \mathbb{P}^n$ et d'_v la distance associée. D'après le théorème 3 de [**16**], on a l'inégalité

$$\eta_v(T_\varepsilon)^{-1} d_v(x,y) \leq d'_v(x,y) \leq \eta_v(T_\varepsilon) d_v(x,y),$$

où $\eta_v(T_\varepsilon) = \|T_\varepsilon\|_v \|T_\varepsilon^{-1}\|_v$. Ici $\|T_\varepsilon\|_v$ désigne la norme matricielle associée à la norme $|.|_{2,v}$: $\|T_\varepsilon\|_v = \sup\{|T_\varepsilon(u)|_{2,v}/|u|_{2,v} \mid u \in \mathbb{C}_v^{n+1} \setminus \{0\}\}$. On a les majorations

$$\|T_\varepsilon\|_v \leq \frac{1}{1-\varepsilon'} \text{ et } \|T_\varepsilon^{-1}\|_v \leq \frac{1}{1-\varepsilon'},$$

d'où

$$\frac{d_v(x,y)}{(1+\varepsilon)} \leq (1-\varepsilon')^2 d_v(x,y) \leq d'_v(x,y) \leq \frac{d_v(x,y)}{(1-\varepsilon')^2} \leq (1+\varepsilon) d_v(x,y).$$

□

Soit $\epsilon > 0$. D'après ce lemme, on peut choisir le plongement ϕ de telle sorte que $d'_v(x,z) \leq (1+\varepsilon) d_v(x,z)$ pour tout $z \in X(K)$, et donc choisir $c \leq \log(1+\varepsilon)$. En faisant tendre ε vers 0, on en déduit que l'on peut poser $c = 0$. On a donc démontré le théorème suivant.

THÉORÈME 4.3.2. *Soit* $\mathscr{L}$ *un fibré inversible nef muni d'une métrique adélique et* $\gamma > 0$ *un nombre rationnel tel que* $\mathscr{L}_\gamma$ *soit dans le cône effectif de* $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{X})$*. Pour tout point* $y \in X(K)$ *distinct de* x *tel que* $y \notin \pi(\mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma))$*, l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\begin{aligned}\log(d_v(x,y)) \geq & \frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]} \inf\{h_{\mathscr{L}}(\pi(z)) - \gamma h_E(z) \mid z \in (\widetilde{X} \setminus \mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma))(K)\} \\ & - a(v)\log 2 - \frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]} h_{\mathscr{L}}(y),\end{aligned}$$

où $a(v) = 1$ *si* v *est archimédienne et* $a(v) = 0$ *sinon.*

Ce théorème implique le corollaire 4.1.3 de la façon suivante. Si $\mathscr{L}$ est ample, alors on sait que $\epsilon_x(\mathscr{L}) > 0$ et pour tout nombre réel strictement positif $\gamma < \epsilon_x(\mathscr{L})$, $\mathscr{L}_\gamma$ est ample. On en déduit que le lieu de base stable $\mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma)$ du théorème 4.3.2 est vide. Soit $\varepsilon > 0$ et $y \in X(K)$ un point distinct de x. Si $\gamma < \epsilon_x(\mathscr{L})$ est suffisamment proche de $\epsilon_x(\mathscr{L})$ et si $h_{\mathscr{L}}(y) \geq 0$, on a l'implication

$$\begin{aligned} & \log(d_v(x,y)) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\epsilon_x(\mathscr{L})[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \varepsilon\right) h_{\mathscr{L}}(y) \\ \Longrightarrow \ & \log(d_v(x,y)) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \frac{\varepsilon}{2}\right) h_{\mathscr{L}}(y).\end{aligned}$$

On obtient le corollaire 4.1.3 en prenant la constante $b(x,\mathscr{L})$ égale à

$$2\max\left\{0, a(v)\log 2 - \frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]} \inf_{z \in (\widetilde{X}\setminus\mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma))(K)} (h_{\mathscr{L}}(\pi(z)) - \gamma h_E(z))\right\}.$$

La propriété de Northcott (théorème 1.3.8 page 38) implique alors qu'il n'existe qu'un nombre fini de points $y \in X(K)$ distincts de x tels que

$$\log(d_v(x,y)) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\epsilon_x(\mathscr{L})[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \varepsilon\right) h_{\mathscr{L}}(y).$$

Mais ici la minoration du théorème dépend du choix de la métrique sur E (à cause du terme $\inf\{h_{\mathscr{L}}(\pi(z)) - \gamma h_E(z) \mid z \in (\widetilde{X} \setminus \mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma))(K)\}$), qui est définie par rapport à un plongement particulier $X_L \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ (tel que $\phi(x) = (1 : 0 : \cdots : 0)$). L'objectif de la suite du texte est d'obtenir des bornes indépendantes d'un tel choix. Nous allons utiliser une autre approche, inspirée de celle de [**56**], où les auteurs utilisent le théorème de Faltings et Wüstholz pour généraliser le théorème de Roth. Dans le cas où l'on ne s'intéresse qu'à une seule place ($\mathrm{card}\,\mathscr{P} = 1$), nous verrons comment montrer facilement une version effective de cet énoncé dans la partie 4.4. Nous appliquerons ce résultat pour obtenir une version effective du théorème de Liouville, qui fournit une borne qui ne dépend pas d'un choix de métriques sur E dans le cas où le point x est régulier.

REMARQUE 4.3.3. Comme nous l'avons mentionné au paragraphe 4.2, dans l'article [**57**], McKinnon et Roth considèrent une fonction de hauteur $h_{\mathscr{L}}$ associée à une décomposition $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2^{-1}$, où $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sont des fibrés inversibles très amples sur X. Comme le souligne la remarque B.3.2.1 (ii) de [**45**], la constante c_γ telle que $h_{m\mathscr{L}_\gamma}(y) \geq c_\gamma$ pour tout point $y \in X \setminus (\pi(\mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma)))(K)$ est en général difficile à minorer en fonction des plongements définis par un choix de bases de sections globales de $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$. Mais comme nous l'avons vu, le formalisme adélique nous permet d'obtenir facilement la minoration

$$h_{m\mathscr{L}_\gamma}(y) \geq \inf\{h_{\mathscr{L}}(\pi(z)) - \gamma h_E(z) \mid z \in (\widetilde{X} \setminus \mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma))(K)\}.$$

Par ailleurs, d'après le lemme 1.5.3 page 41, la quantité

$$\inf\{h_{\mathscr{L}}(\pi(z)) - \gamma h_E(z) \mid z \in (\widetilde{X} \setminus \mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma))(K)\}$$

du théorème 4.3.2 est minorée par la quantité

$$-\frac{1}{r}\lambda_{\max}(\overline{r\mathscr{L}_\gamma}) = -\frac{1}{r}\min\{\max_{1\leq i\leq t} h_{r\mathscr{L}_\gamma}(s_i) \mid (s_1,\ldots,s_t) \text{ base de } H^0(X_L, r\mathscr{L}_\gamma)\},$$

où r est entier tel que $r\gamma \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et tel que $\mathscr{B}(r\mathscr{L}_\gamma) = \mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma)$. Mais ici la quantité $\frac{1}{r}\lambda_{\max}(\overline{r\mathscr{L}_\gamma})$ dépend encore du choix de métriques sur E. Dans la partie 5, nous verrons comment remplacer cette quantité $\frac{1}{r}\lambda_{\max}(\overline{r\mathscr{L}_\gamma})$ par

$$\frac{1}{r}\min\{\max_{i\in I} h_{\mathscr{L}}(s_i) \mid (s_i)_{i\in I} \text{ base de } F_r\},$$

où F_r est le sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^0(X_L, \mathscr{L})$ des sections s'annulant à l'ordre $r\gamma$ en x (corollaire 4.5.4).

4.4. Variantes effectives du théorème de Faltings et Wüstholz

Soit $K \subseteq L$ deux corps de nombres et $\mathscr{P}$ un sous-ensemble fini de Σ_L. On considère une variété projective X sur $\operatorname{Spec} K$ munie d'un faisceau inversible adélique $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K})$. Notons $V = \mathrm{H}^0(X, \mathscr{L})$ et $V_L = V \otimes L$. On munit l'espace vectoriel V_L d'une structure de fibré adélique en considérant pour toute place v de K la norme $\|s\|_v = \|s\|_{v,\sup}$. Soit F un sous-espace vectoriel de V_L. Pour chaque place $w \in \mathscr{P}$, on fixe un nombre réel t_w. On considère le lieu de base de F défini par

$$\mathscr{B}(F) = \{x \in X \mid s(x) = 0 \ \forall s \in F\}$$

et on fixe $(s_1, \ldots, s_{\dim F})$ une base de F.

Théorème 4.4.1. *Pour chaque place w de $\mathscr{P}$, soit C_w un nombre réel non nul. Si $\delta := \sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w:\mathbb{Q}_w]}{[L:\mathbb{Q}]} t_w > 1$, alors tous les points $x \in (X \setminus \mathscr{B}(F))(K)$ satisfaisant le système d'inégalités*

$$\frac{\|s_j(x)\|_w}{\|s_j\|_{w,\sup}} \leq C_w \exp(-t_w h_{\mathscr{L}}(x)), \quad \forall\ 1 \leq j \leq \dim F, \quad \forall\ w \in \mathscr{P} \tag{34}$$

vérifient

$$h_{\mathscr{L}}(x) \leq \frac{1}{\delta - 1}\left(\sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]}\log(C_w) + \max_{1\leq j\leq \dim F} h(s_j)\right).$$

En particulier, ces points sont en nombre fini si $\mathscr{L}$ est ample.

Démonstration : Soit $x \in (X \setminus \mathscr{B}(F))(K)$ vérifiant (34). Il existe un entier i, $1 \leq i \leq \dim F$ tel que $s_i(x) \neq 0$ (car sinon $x \in \mathscr{B}(F)$). Pour toute place v de L,

$$\|s_i(x)\|_v / \|s_i\|_{v,\sup} \leq 1$$

et par hypothèse

$$\frac{\|s_i(x)\|_w}{\|s_i\|_{w,\sup}} \leq C_w \exp(-t_w h_{\mathscr{L}}(x))$$

pour toute place $w \in \mathscr{P}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}-(h_{\mathscr{L}}(x) + h(s_i)) &= \sum_{v\in\Sigma_L} \frac{[L_v : \mathbb{Q}_v]}{[L : \mathbb{Q}]}\log\left(\frac{\|s_i(x)\|_v}{\|s_i\|_{v,\sup}}\right)\\ &\leq -\sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]} t_w h_{\mathscr{L}}(x) + \sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]}\log(C_w),\end{aligned}$$

d'où

$$(\delta - 1)h_{\mathscr{L}}(x) \leq \max\{h(s_j) \mid 1 \leq j \leq \dim F\} + \sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]}\log(C_w).$$

On en déduit la majoration voulue grâce à l'hypothèse $\delta > 1$. Si $\mathscr{L}$ est ample, on en déduit que les points vérifiant (34) sont en nombre fini d'après la propriété de Northcott (théorème 1.3.8 page 38).

□

On obtient immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 4.4.2. *Pour chaque place w de $\mathscr{P}$, soit C_w un nombre réel non nul. Si $\delta := \sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w:\mathbb{Q}_w]}{[L:\mathbb{Q}]} t_w > 1$, alors tous les points $x \in (X \setminus \mathscr{B}(F))(K)$ satisfaisant le système d'inégalités*

$$\frac{\|s(x)\|_w}{\|s\|_{w,\sup}} \leq C_w \exp(-t_w h_{\mathscr{L}}(x)), \quad \forall s \in F \setminus \{0\}, \quad \forall w \in \mathscr{P}$$

vérifient

$$h_{\mathscr{L}}(x) \leq \frac{1}{\delta - 1}\Bigg(\sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]} \log(C_w) \\ + \min\{ \max_{1\leq j\leq \dim F} h(s_j) \mid (s_1, \ldots, s_{\dim F}) \text{ base de } F\} \Bigg).$$

En particulier, ces points sont en nombre fini si $\mathscr{L}$ est ample.

Pour chaque place w de $\mathscr{P}$, on considère une filtration séparée $\mathscr{F}_w$ de V_L, donnée par un drapeau

$$V_L = V_0^{(w)} \supsetneq V_1^{(w)} \supsetneq \ldots \supsetneq V_{e_w}^{(w)} \supsetneq \{0\}$$

et une suite finie de nombres réels

$$c_{w,0} < c_{w,1} < \ldots < c_{w,e_w}$$

(voir le paragraphe 1.6). Pour tout nombre réel $t \in [c_{w,0}, c_{w,e_w}]$ on a

$$\mathscr{F}_w^t V_L = \bigcup_{\substack{0\leq i\leq e_w \\ c_{w,i}\geq t}} V_i^{(w)}.$$

Pour chaque place $w \in \mathscr{P}$, on considère un nombre réel t_w tel que $c_{w,0} \leq t_w \leq c_{w,e_w}$. En appliquant le théorème 4.4.1 avec $F = \bigcap_{w\in\mathscr{P}} \mathscr{F}_w^{t_w} V_L$, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 4.4.3. *Pour chaque place w de $\mathscr{P}$, soit C_w un nombre réel non nul. Si $\delta := \sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w:\mathbb{Q}_w]}{[L:\mathbb{Q}]} t_w > 1$, alors tous les points $x \in (X \setminus \mathscr{B}(F))(K)$ satisfaisant le système d'inégalités*

$$\frac{\|s(x)\|_w}{\|s\|_{w,\sup}} \leq C_w \exp(-t_w h_{\mathscr{L}}(x)), \quad \forall s \in \mathscr{F}_w^{t_w} V_L \setminus \{0\}, \quad \forall w \in \mathscr{P}$$

vérifient

$$h_{\mathscr{L}}(x) \leq \frac{1}{\delta - 1}\Bigg(\sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]} \log(C_w) \\ + \min\{ \max_{1\leq j\leq \dim F} h(s_j) \mid (s_1, \ldots, s_{\dim F}) \text{ base de } F\} \Bigg).$$

En particulier, ces points sont en nombre fini si $\mathscr{L}$ est ample.

Donnons maintenant une conséquence de ce théorème avec des bases fixées. Soient $w \in \mathscr{P}$ et $k_w \in \{0, \ldots, e_w\}$ un entier. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq e_w$, on fixe une base $(s_{w,k,l})_l$ de $V_k^{(w)}$.

Corollaire 4.4.4. *Supposons que l'espace vectoriel*

$$F = \bigcap_{w\in\mathscr{P}} V_{k_w}^{(w)} = \bigcap_{w\in\mathscr{P}} \mathscr{F}_w^{c_{w,k_w}} V_L$$

soit non nul. Si $\delta := \sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w:\mathbb{Q}_w]}{[L:\mathbb{Q}]} c_{w,k_w} > 1$, alors tous les points $x \in (X \setminus \mathscr{B}(F))(K)$ satisfaisant le système d'inégalités

$$\|s_{w,k_w,l}(x)\|_w \leq \exp(-c_{w,k_w} h_{\mathscr{L}}(x)), \ \forall\, 1 \leq l \leq \dim(V_{k_w}^{(w)}), \ \ \forall\, s \in V_{k_w}^{(w)} \setminus \{0\}, \ \ \forall\, w \in \mathscr{P},$$

vérifient

$$h_{\mathscr{L}}(x) \leq \frac{1}{\delta - 1}\left(-\sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]}\log(\tau_w) + \max_{1\leq j\leq \dim F} h(s_j)\right),$$

où $(s_1, \ldots, s_{\dim F})$ *est une base quelconque de* F *et les* τ_w *sont des nombres réels non nuls ne dépendant que de la base* $(s_{w,k_w,l})_l$ *et du choix de métrique sur* $\mathscr{L}$*. Dans le cas particulier où* $\mathscr{P} = \{w\}$ *n'a qu'un élément, on a de plus*

$$h_{\mathscr{L}}(x) \leq \frac{1}{\delta - 1}\left(-\frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]}\min_l \log(\|s_{w,k_w,l}\|_{w,\sup}) + \max_l h(s_{w,k_w,l})\right).$$

Démonstration : Soit $x \in (X \setminus \mathscr{B}(F))(K)$ vérifiant le système d'inégalités du corollaire. Soit $w \in \mathscr{P}$. Si w est une place finie, soit $\alpha_w \in]0, 1]$ la borne supérieure des nombres réels $\alpha \in]0, 1[$ tels que la base $(s_{w,k_w,l})_l$ soit α-orthogonale pour w, c'est à dire

$$\|\sum_l a_l s_{w,k_w,l}\|_{w,\sup} \geq \alpha \max_l(|a_l|_w \|s_{w,k_w,l}\|_{w,\sup})$$

pour tout $\sum_l a_l s_{w,k_w,l} \in V_L$. Si w est archimédienne, alors par équivalence des normes il existe un nombre réel α_w tel que

$$\|\sum_l a_l s_{w,k_w,l}\|_{w,\sup} \geq \alpha_w \sum_l(|a_l|_w \|s_{w,k_w,l}\|_{w,\sup})$$

pour tout $\sum_l a_l s_{w,k_w,l} \in V_L$. On a ainsi

$$\begin{aligned}\|\sum_l a_l s_{w,k_w,l}\|_{w,\sup} &\geq \alpha_w \sum_l(|a_l|_w \|s_{w,k_w,l}\|_{w,\sup})\\ &\geq \alpha_w \left(\sum_l |a_l|_w\right)\cdot \min_l \|s_{w,k_w,l}\|_{w,\sup}.\end{aligned}$$

Considérons une section non nulle $s = \sum_l a_l s_{w,k_w,l}$ dans $V_{k_w}^{(w)}$; si w est finie, on a alors

$$\begin{aligned}\|s(x)\|_w = \|\sum_l a_l s_{w,k_w,l}(x)\|_w &\leq \max_l |a_l|_w \cdot \|s_{w,k_w,l}(x)\|_w\\ &\leq \exp(-c_{w,k_w} h_{\mathscr{L}}(x)) \max_l |a_l|_w.\end{aligned}$$

On démontre de la même façon un résultat analogue si $w|\infty$. En désignant par τ_w la quantité $\alpha_w \min_l \|s_{w,k_w,l}\|_{w,\sup}$, le point x est aussi solution du système

$$\frac{\|s(x)\|_w}{\|s\|_{w,\sup}} \leq \tau_w^{-1}\exp(-c_{w,k_w} h_{\mathscr{L}}(x)), \quad \forall s \in V_{k_w}^{(w)} \setminus \{0\},\ \forall k_w,\ \forall w \in \mathscr{P}.$$

En appliquant le corollaire 4.4.2, on obtient que

$$h_{\mathscr{L}}(x) \leq \frac{1}{\delta - 1}\left(-\sum_{w\in\mathscr{P}} \frac{[L_w : \mathbb{Q}_w]}{[L : \mathbb{Q}]}\log(\tau_w) + \max_{1\leq j\leq \dim F} h(s_j)\right),$$

où $(s_1, \ldots, s_{\dim F})$ est une base quelconque de F. Si $\mathscr{P} = \{w\}$ n'a qu'un élément, il suffit d'appliquer le théorème 4.4.1 avec $C_w = (\min_l \|s_{w,k_w,l}\|_{w,\sup})^{-1}$.

□

Dans le cas où l'ensemble $\mathscr{P} = \{w\}$ n'a qu'un élément, ce résultat implique le théorème 9.1 de [**26**]. En effet, si on note W le sous-espace déstabilisant maximal de la filtration $\mathscr{F}_w$, on a dans ce cas $W = V_{e_w}^{(w)}$ et $\mu_w(W) = c_{w,e_w}$. L'intérêt des résultats de cette partie, en plus de fournir une majoration explicite de la hauteur des solutions, est qu'ils donnent un lieu de base explicite en dehors duquel se situent les points satisfaisant le système d'inégalités. Cette nouveauté est cruciale pour les applications que nous avons en vue dans la partie 4.5. Cependant dans le cas de plusieurs places le corollaire 4.4.4 n'implique pas le théorème 9.1 de [**26**] car l'ensemble $\mathscr{B}(F)$ peut être égal à X tout entier.

4.5. Le théorème de Liouville effectif : seconde approche

Dans cette partie, nous démontrons le théorème 4.1.2 de l'introduction (dont le corollaire 4.1.3 est une conséquence). Dans l'article [**56**], McKinnon et Roth utilisent le théorème 9.1 de l'article [**26**] pour établir une inégalité entre une constante d'approximation et la constante de Seshadri et démontrent ainsi une généralisation du théorème de Roth. Nous reprenons ici ces idées en utilisant à la place le théorème 4.4.1. Les constantes qui interviendront dans cette partie ont l'avantage de ne pas dépendre d'un choix de métriques sur le diviseur exceptionnel, à la différence de celles de la partie 4.3.

4.5.1. Cas général. Soit K un corps de nombres et X une variété projective de dimension $d \geq 1$ sur $\mathrm{Spec}(K)$. On considère un fibré inversible adélique $\overline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}, (\|.\|_v)_{v \in \Sigma_K})$ sur X avec $\mathscr{L}$ nef et un point régulier $x \in X(\overline{K})$. On note L le corps de définition de x, $\mathscr{O}_{X,x}$ l'anneau local défini par x, $\mathfrak{M}_x$ son idéal maximal, $\pi\colon \widetilde{X} \to X_L$ l'éclatement de $X_L = X \times_K \mathrm{Spec}(L)$ en x et E le diviseur exceptionnel associé. Comme dans la partie 4.3, nous noterons $\mathscr{L}_\gamma = \pi^*\mathscr{L} - \gamma E$ pour tout rationnel positif γ. Dans leurs articles [**56**] et [**57**], McKinnon et Roth utilisent des méthodes asymptotiques pour démontrer des analogues des théorèmes de Roth et de Liouville en dimension quelconque en considérant des suites de points qui convergent vers x relativement à une distance. Pour cela ils comparent le comportement asymptotique des générateurs de $\mathfrak{M}_x$ et de la fonction distance (voir la partie 2 de [**56**]). A cet effet ils n'ont pas besoin d'expliciter les constantes qui interviennent dans ces lemmes. Le lemme 4.5.1 ci-dessous est le résultat clé qui nous permettra d'obtenir des constantes explicites, puis une version effective du théorème de Liouville. Dans la suite, on fixe une place v de L et un plongement $\iota\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ et on considère la distance d_v associée à ce plongement. On note $\iota(x) = (x_0 : \cdots : x_n)$.

Afin de comparer les normes de sections de $\mathscr{L}$ avec la fonction distance, nous allons utiliser l'inégalité de Cauchy dans le cas complexe et son analogue dans le cas ultramétrique. Pour cela nous devrons travailler sur des disques de $\mathbb{C}_v^d$. Pour tout nombre réel $\rho > 0$, on considère la boule

$$B(\rho, \iota) = \{z \in X(\mathbb{C}_v) \mid d_v(x, z) < \rho\}.$$

Rappelons que le point $x \in X(\overline{K})$ est supposé régulier. D'après le corollaire 6.2.11 de [**54**] (voir aussi la proposition 3.24 de [**58**]), il existe un ouvert U de X_L contenant x et sur lequel $\mathscr{L}$ est trivial ainsi qu'un morphisme étale $g\colon U \to \mathbb{A}_L^d$. Il existe alors un polydisque D dans $\mathbb{C}_v^d$ et un ouvert V_D de $U(\mathbb{C}_v)$ (pour la topologie v-adique) tels que g induise un isomorphisme entre V_D et D. On définit alors

$$\rho_x(\mathscr{L}, \iota, U, V_D) = \sup\{\rho > 0 \mid B(\rho, \iota) \subset V_D\}.$$

Enfin, nous définissons $\rho_x(\mathscr{L}, \iota)$ comme la borne supérieure des $\rho_x(\mathscr{L}, \iota, U, V_D)$ pour U et V_D parcourant les ouverts satisfaisant les conditions précédentes. Cette quantité dépend du plongement $\iota\colon X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ fixé. Dans la suite, s'il n'y a pas d'ambiguïté nous noterons plus simplement $\rho_x(\mathscr{L}) = \rho_x(\mathscr{L}, \iota)$ et $B(\rho) = B(\rho, \iota)$. Remarquons que dans le cas où $X = \mathbb{P}^n$ et $\mathscr{L} = \mathscr{O}(\ell)$ avec $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors $\rho_x(\mathscr{L}) \geq 1$. En effet, si $d_v(x, y) < 1$ alors il existe i_0 tel que $x_{i_0} y_{i_0} \neq 0$ (pour un choix convenable de coordonnées homogènes) et donc $B(1)$ est inclus dans un ouvert satisfaisant les conditions précédentes.

Dans la suite, nous noterons $a(v) = 1$ si v est archimédienne et $a(v) = 0$ sinon. L'énoncé suivant est au coeur de la démonstration du théorème 4.5.2. Il permet de comparer la norme de l'évaluation d'une section en un point $y \in X(K)$ avec la distance $d_v(x, y)$. Cette technique est utilisée par McKinnon et Roth sous une forme qui n'est pas effective dans l'article [**56**] (notamment dans la démonstration de leur théorème 5.1) pour démontrer un analogue du théorème de Roth. À notre connaissance, il n'existe pas de résultat similaire explicite dans la littérature à l'heure actuelle.

LEMME 4.5.1. *Soient r un entier naturel et $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{L}) \setminus \{0\}$ une section s'annulant à l'ordre r en x. Alors pour tout point $y \in X(K)$ distinct de x tel que $d_v(x, y) < 1/2^{a(v)}$,* *l'inégalité suivante est satisfaite :*

$$\frac{\|s(y)\|_v}{\|s\|_{v,\sup}} \leq \left(2^{a(v)} \frac{d_v(x,y)}{\rho_x(\mathscr{L})}\right)^r.$$

Démonstration : On note $T_0, \ldots, T_n$ les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^n$ correspondant à la distance d_v. Supposons dans un premier temps que ι envoie le point x sur $(1 : 0 : \cdots : 0) \in \mathbb{P}^n$. Considérons l'ouvert U_0 de $\mathbb{P}^n$ défini par $T_0 \neq 0$. Pour $1 \leq i \leq n$, on note $u_i = T_i/T_0 \in \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(U_0)$. On note encore u_i la restriction à $\iota^{-1}(U_0)$. D'après la preuve du lemme 2.5 de [**56**],

$$\min\{1, \max(|u_1(z)|_v, \ldots, |u_n(z)|_v)\} \leq 2^{a(v)} d_v(x,z)$$

pour tout $z \in \iota^{-1}(U_0)$. Soit $y \in X(K)$ distinct de x tel que $d_v(x,y) < 1/2^{a(v)}$ et $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{L} \otimes \mathfrak{M}_x^r) \setminus \{0\}$. Si $d_v(x,y) \geq \rho_x(\mathscr{L})$ alors le résultat découle simplement de la majoration

$$\frac{\|s(y)\|_v}{\|s\|_{v,\sup}} \leq 1.$$

Dans la suite, on suppose donc $d_v(x,y) < \rho_x(\mathscr{L})$. Le point y appartient à $\iota^{-1}(U_0)$ (car sinon $d_v(x,y) = 1$) et donc

$$\max(|u_1(y)|_v, \ldots, |u_n(y)|_v) \leq 2^{a(v)} d_v(x,y).$$

Soit ρ un nombre réel tel que $d_v(x,y) < \rho < \rho_x(\mathscr{L})$. Rappelons qu'il existe un morphisme étale $g \colon B(\rho, \iota) \subset U \to \mathbb{A}_L^d$ où U est un ouvert de Zariski sur lequel $\mathscr{L}$ est trivial : $\mathscr{L}_{|U} = s_0 \cdot \mathscr{O}_U$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $u_1, \ldots, u_d$ engendrent l'idéal $\mathfrak{M}_x$ (rappelons que $d = \dim X$). Il existe donc un système de paramètres $(\widetilde{u}_1, \ldots, \widetilde{u}_d)$ en $g(x)$ tel que $\widetilde{u}_i(g(z)) = u_i(z)$ au voisinage de x. Nous allons montrer qu'il existe une trivialisation $\mathscr{L}_{|U} = s_\varepsilon \cdot \mathscr{O}_U$ vérifiant

$$1 - \varepsilon \leq \|s_\varepsilon(z)\|_v \leq 1 + \varepsilon$$

pour tout $z \in B(\rho, \iota)$. Pour tout $z \in B(\rho, \iota)$, soit un élément $b_v(z) \in \mathbb{C}_v$ tel que $|b_v(z)|_v = \|s_0(z)\|_v^{-1}$. On considère l'application continue

$$\begin{array}{rccc} \iota_v \colon & B(\rho, \iota) & \to & \mathbb{C}_v \\ & z & \mapsto & b_v(z). \end{array}$$

Si v est ultramétrique, il existe un polynôme P tel que pour tout $z \in B(\rho, \iota)$, $|P(z) - \iota_v(z)|_v < \varepsilon / \|s_0\|_{v,\sup}$ d'après le théorème d'interpolation de [**15**]. Considérons la section $s_\varepsilon = s_0 \cdot P$. Alors pour tout $z \in B(\rho, \iota)$,

$$\|s_\varepsilon(z)\|_v = \|s_0(z)\|_v |P(z)|_v \leq \|s_0(z)\|_v |\iota_v(z)|_v + \varepsilon = 1 + \varepsilon.$$

De même $\|s_\varepsilon(z)\|_v \geq 1 - \varepsilon$. Ainsi, pour tout $z \in B(\rho, \iota)$, on a

$$1 - \varepsilon \leq \|s_\epsilon(z)\|_v \leq 1 + \varepsilon.$$

Dans le cas archimédien, on procède de la même manière en appliquant le théorème de Stone-Weierstrass à $\iota_v \colon B(\rho, \iota) \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \|s_0(z)\|_v^{-1}$.

Il existe donc une fonction $f \in \mathscr{O}_X(U)$ telle que $s = s_\varepsilon \cdot f$. Il existe également un polydisque D dans $\mathbb{C}_v^d$ et un ouvert V_D dans $U(\mathbb{C}_v)$ tels que g induise un isomorphisme entre V_D et D. La fonction f restreinte à V_D s'identifie à une fonction analytique $\widetilde{f}$ sur le polydisque D. Par hypothèse, si $d_v(x,z) < \rho$ alors $g(z) \in D$, et de plus $|\widetilde{u}_i(g(z))|_v < \rho$. Donc $\widetilde{f}$ est analytique sur le polydisque $D' = \{z \in \mathbb{C}^d \mid \max_{1 \leq i \leq d} |\widetilde{u}_i(z)|_v < \rho\}$ via g. Supposons d'abord que v est archimédienne. On note $M = \sup\{|\widetilde{f}(z)| \mid z \in D'\}$. D'après le théorème 3.4 de [**51**], on en déduit que

$$\begin{aligned} \|s(y)\|_v \leq (1+\varepsilon)|\widetilde{f}(g(y))| &\leq (1+\varepsilon) \left(\frac{\max_{1 \leq i \leq d} |\widetilde{u}_i(g(y))|}{\rho}\right)^r M \\ &\leq (1+\varepsilon) \left(2 \frac{d_v(x,y)}{\rho}\right)^r M. \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\|s\|_{v,\sup} \geq (1-\varepsilon)M$. En faisant tendre ε vers 0 et ρ vers $\rho_x(\mathscr{L},\iota)$, on obtient bien

$$\frac{\|s(y)\|_v}{\|s\|_{v,\sup}} \leq \left(2\frac{d_v(x,y)}{\rho_x(\mathscr{L},\iota)}\right)^r.$$

Considérons maintenant le cas où v est ultramétrique. La fonction f s'identifie à une fonction analytique $\widetilde{f}$ sur le polydisque D' qui s'annule à un ordre supérieur à r en $g(x)$ et s'écrit

$$\widetilde{f} = \sum_{r\leq k_1+\cdots+k_n} a_k \widetilde{u}_1^{k_1}\cdots\widetilde{u}_n^{k_n}.$$

On a $f(y) = \widetilde{f}(g(y))$ et on obtient

$$\begin{aligned}\|s(y)\|_v = \|s_\varepsilon(y)\|_v|f(y)|_v &\leq (1+\varepsilon)\max_k\{|a_k|_v \prod_{1\leq i\leq n}|\widetilde{u}_i(g(y))|_v^{k_i}\}\\ &\leq (1+\varepsilon)\max_k(|a_k|_v\rho^{|k|-r})(d_v(x,y))^r.\end{aligned}$$

D'après le lemme 15.1 de [**77**] appliqué sur le polydisque D', on a de plus

$$\begin{aligned}\|s\|_{v,\sup} &\geq \sup\{\|s_0(\nu)\|_v|f(\nu)|_v \mid \nu\in B(\rho_x(\mathscr{L}),\iota)\}\\ &\geq (1-\varepsilon)\sup\{|\widetilde{f}(\nu)|_v \mid \nu\in D'\}\\ &\geq (1-\varepsilon)\max_k(|a_k|_v\rho^{|k|}).\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0 et ρ vers $\rho_x(\mathscr{L},\iota)$, on obtient

$$\frac{\|s(y)\|_v}{\|s\|_{v,\sup}} \leq \left(\frac{d_v(x,y)}{\rho_x(\mathscr{L},\iota)}\right)^r.$$

Le lemme est donc démontré dans le cas où $\iota(x) = (1:0:\cdots:0)$. Le cas d'un plongement ι quelconque se déduit du lemme 4.3.1 de la façon suivante. Si v est ultramétrique, soit $\varepsilon'>0$. D'après le lemme 4.3.1, il existe un plongement ι' tel que $\iota'(x) = (1:0:\cdots:0)$, définissant une distance d'_v qui vérifie

$$(1+\varepsilon')^{-1}d_v(x,z) \leq d'_v(x,z) \leq (1+\varepsilon')d_v(x,z)$$

pour tout $z\in X(\mathbb{C}_v)$. On en déduit que

$$\rho_x(\mathscr{L},\iota') = (1+\varepsilon')^{-1}\rho_x(\mathscr{L},\iota).$$

Soit $y\in X(K)$ distinct de x tel que $d_v(x,y) < \min(1,\rho_x(\mathscr{L},\iota))$. On suppose ε' suffisamment petit pour avoir $d'_v(x,y) < \min(1,\rho_x(\mathscr{L},\iota'))$. D'après le cas précédent,

$$\frac{\|s(y)\|_v}{\|s\|_{v,\sup}} \leq \left(\frac{d'_v(x,y)}{\rho_x(\mathscr{L},\iota')}\right)^r,$$

donc

$$\frac{\|s(y)\|_v}{\|s\|_{v,\sup}} \leq \left((1+\epsilon')^2\frac{d_v(x,y)}{\rho_x(\mathscr{L},\iota)}\right)^r.$$

On en déduit le résultat voulu en faisant tendre ε' vers 0. Si v est archimédienne, on conclut également avec le lemme 4.3.1.

□

Le résultat principal de cette partie est le théorème suivant, qui est une conséquence du corollaire 4.4.2 et du lemme 4.5.1. Rappelons que l'on note $a(v)=1$ si v est archimédienne et $a(v)=0$ sinon.

THÉORÈME 4.5.2. *Soient $\gamma>0$ un nombre rationnel et r un entier non nul tel que $r\gamma\in\mathbb{N}$. On note F_r le sous-espace vectoriel de $H^0(X_L, r\mathscr{L})$ des sections qui s'annulent à l'ordre $r\gamma$ en x. Alors pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout point $y\in(X\setminus\mathscr{B}(F_r))(K)$ distinct de x satisfaisant l'inégalité*

$$\log(d_v(x,y)) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]}+\varepsilon\right)h_{\mathscr{L}}(y), \tag{35}$$

la hauteur $h_{\mathscr{L}}(y)$ est majorée par

$$\max\left\{\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]}+\varepsilon\right)^{-1}a(v)\log 2,\ \frac{1}{\varepsilon}\max\{c_1(\mathscr{L},x),c_2(\mathscr{L},x,\gamma,r)\}\right\},$$

où

$$c_1(\mathscr{L},x)=2a(v)\log 2-2\log(\rho_x(\mathscr{L})),$$

et

$$c_2(\mathscr{L},x,\gamma,r)=\frac{2[L:\mathbb{Q}]}{r\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]}\min\{\max_{1\leq i\leq \ell}h(s_i)\mid (s_i)_{1\leq i\leq \ell}\ \textit{base de}\ \ F_r\}.$$

En particulier, les points vérifiant (35) sont en nombre fini si $\mathscr{L}$ est ample.

Démonstration : On note $n_v=\frac{[L:\mathbb{Q}]}{[L_v:\mathbb{Q}_v]}$. Soient ε un nombre réel strictement positif et $y\in(X\setminus\mathscr{B}(F_r))(K)$ un point distinct de x tel que

$$\log(d_v(x,y))<-(n_v/\gamma+\varepsilon)h_{\mathscr{L}}(y).$$

Soit $s\in F_r\setminus\{0\}$; cette section s'annule à l'ordre $r\gamma$ en x. On peut supposer que $h_{\mathscr{L}}(y)>(\frac{n_v}{\gamma}+\varepsilon)^{-1}a(v)\log 2$; ainsi l'hypothèse du lemme 4.5.1 est satisfaite et on obtient

$$\frac{\|s(y)\|_v}{\|s\|_{v,\sup}}\leq\left(2^{a(v)}\frac{d_v(x,y)}{\rho_x(\mathscr{L})}\right)^{r\gamma}.$$

On peut supposer que

$$h_{\mathscr{L}}(y)\geq\frac{2}{\varepsilon}\log\left(\frac{2^{a(v)}}{\rho_x(\mathscr{L})}\right)=\frac{1}{\varepsilon}c_1(\mathscr{L},x).$$

On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\|s(y)\|_v}{\|s\|_{v,\sup}}&\leq\left(2^{a(v)}\frac{d_v(x,y)}{\rho_x(\mathscr{L})}\right)^{r\gamma}\\&\leq\left(2^{a(v)}\frac{\exp(-(n_v/\gamma+\varepsilon)h_{\mathscr{L}}(y))}{\rho_x(\mathscr{L})}\right)^{r\gamma}\\&\leq\exp(-\gamma(n_v/\gamma+\varepsilon/2)h_{r\mathscr{L}}(y)).\end{aligned}$$

En appliquant le corollaire 4.4.2 avec $F=F_r$ et $t_v=n_v+\gamma\varepsilon/2>n_v$, on en déduit que

$$rh_{\mathscr{L}}(y)\leq h_{r\mathscr{L}}(y)\leq\frac{2n_v}{\varepsilon\gamma}c'(\mathscr{L},x),$$

où

$$c'(\mathscr{L},x)\quad=\quad\min\{\max_{1\leq i\leq r}h(s_i)\mid (s_i)_{1\leq i\leq r}\ \text{base de}\ F_r)\}$$

Si $\mathscr{L}$ est ample, ces points sont en nombre fini d'après la propriété de Northcott.

□

Le lemme suivant nous permettra de faire le lien entre le théorème 4.5.2 et le théorème 3.3 de [**57**].

LEMME 4.5.3. *(1) Soit $\gamma>0$ un nombre rationnel tel que $\mathscr{L}_\gamma$ appartienne au cône effectif de $\operatorname{Pic}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{X})$ et soit r un entier tel que $r\gamma\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Notons F_r le sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^0(X_L,r\mathscr{L})$ des sections globales s'annulant à l'ordre $r\gamma$ en x. Pour toute section non nulle $\widetilde{s}\in\mathrm{H}^0(\widetilde{X},r\mathscr{L}_\gamma)$, il existe une section $s\in F_r\setminus\{0\}$ telle que $\widetilde{s}_{|\widetilde{X}\setminus E}=\pi^*(s_{|X\setminus\{x\}})$.*

(2) On a l'inclusion $\mathscr{B}(F_r)\setminus\{x\}\subset\pi(\mathscr{B}(r\mathscr{L}_\gamma))$, où $\mathscr{B}(r\mathscr{L}_\gamma)$ est le lieu de base de $r\mathscr{L}_\gamma$.

Démonstration : Le faisceau correspondant à $r\mathscr{L}_\gamma$ est

$$\begin{aligned}(\pi^*\mathscr{L})^{\otimes r} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{X}}} \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(r\gamma) &= (\pi^{-1}\mathscr{L})^{\otimes r} \otimes_{\pi^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{\widetilde{X}} \otimes_{\mathscr{O}_{\widetilde{X}}} \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(r\gamma)\\ &= (\pi^{-1}\mathscr{L})^{\otimes r} \otimes_{\pi^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(r\gamma).\end{aligned}$$

D'après la proposition 8.1.12 (e) de [**54**], on a $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(1) = I_x \cdot \mathscr{O}_{\widetilde{X}}$, où I_x est le faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_X$ associé à x. On en déduit que

$$r\mathscr{L}_\gamma = (\pi^{-1}\mathscr{L})^{\otimes r} \otimes_{\pi^{-1}\mathscr{O}_X} (\pi^{-1}I_x)^{\otimes r\gamma} \otimes_{\pi^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{\widetilde{X}}. \tag{36}$$

Si $\dim X = 1$ alors le point x correspond à un diviseur de Cartier et l'éclatement $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ est un isomorphisme et donc $r\mathscr{L}_\gamma = \pi^{-1}(\mathscr{L}^{\otimes r} \otimes_{\mathscr{O}_X} I_x^{\otimes r\gamma})$.

Si $\dim X \geq 2$, l'éclatement π induit un isomorphisme entre $\widetilde{X} \setminus E$ et $X_L \setminus \{x\}$. Soit $\widetilde{s} \in \mathrm{H}^0(\widetilde{X}, r\mathscr{L}_\gamma)$ une section non nulle. D'après l'égalité (36), la restriction de $\widetilde{s}$ à $\widetilde{X} \setminus E$ s'identifie à une section (non nulle) s de $r\mathscr{L}$, définie sur $X \setminus \{x\}$. Le point x est régulier, donc est contenu dans un ouvert régulier de Zariski U de X. Le sous-schéma ouvert U est intègre et normal (car un anneau local régulier est intègre et normal), donc $\dim U = \dim X \geq 2$ et d'après le théorème 4.1.14 de [**54**], toute section de $\mathrm{H}^0(X_L \setminus \{x\}, \mathscr{L})$ se prolonge de façon unique en une section globale de $\mathscr{L}$. Ainsi s se prolonge en une section globale de $r\mathscr{L}$; cette section s'annule à l'ordre $r\gamma$ en x d'après l'égalité (36).

Pour montrer l'inclusion $\mathscr{B}(F_r) \setminus \{x\} \subset \pi(\mathscr{B}(r\mathscr{L}_\gamma))$, il suffit de remarquer que si $z \neq x$, alors $\pi^{-1}(z) \notin E$ et d'utiliser la première partie du lemme.

□

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 4.5.2 et du lemme 4.5.3.

COROLLAIRE 4.5.4. *Soit $\gamma > 0$ un nombre rationnel tel que $\mathscr{L}_\gamma$ soit dans le cône effectif de $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{X})$. Soit $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $r\gamma$ soit entier. On note $\mathscr{B}(r\mathscr{L}_\gamma)$ le lieu de base de $r\mathscr{L}_\gamma$ et $\mathscr{B} = \pi(\mathscr{B}(r\mathscr{L}_\gamma))$. On pose*

$$c_1(\mathscr{L}, x) = 2a(v)\log 2 - 2\log(\rho_x(\mathscr{L}))$$

et

$$c_2(\mathscr{L}, x, \gamma, r) = \frac{2[L:\mathbb{Q}]}{r\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]} \min\{\max_{1\leq i\leq \ell} h(s_i) \mid (s_i)_{1\leq i\leq \ell} \text{ base de } F_r\},$$

où F_r est le sous-espace vectoriel de $H^0(X_L, r\mathscr{L})$ des sections qui s'annulent à l'ordre $r\gamma$ en x. Soit $\varepsilon > 0$.

(1) Pour tout point $y \in (X \setminus \mathscr{B})(K)$ distinct de x satisfaisant l'inégalité

$$\log(d_v(x,y)) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \varepsilon\right) h_{\mathscr{L}}(y), \tag{37}$$

la hauteur $h_{\mathscr{L}}(y)$ est majorée par

$$\max\left\{\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \varepsilon\right)^{-1} a(v)\log 2, \frac{1}{\varepsilon}\max\{c_1(\mathscr{L},x), c_2(\mathscr{L},x,\gamma,r)\}\right\}.$$

En particulier, ces points sont en nombre fini si $\mathscr{L}$ est ample.

(2) Si de plus $x \notin \mathscr{B}$, alors pour tout point $y \in X(K)$ distinct de x satisfaisant l'inégalité (37), la hauteur $h_{\mathscr{L}}(y)$ est majorée par

$$\max\left\{\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \varepsilon\right)^{-1} \max\{-\log(d_v(x,\mathscr{B})), a(v)\log 2\}, \frac{1}{\varepsilon}\max\{c_1(\mathscr{L},x), c_2(\mathscr{L},x,\gamma,r)\}\right\},$$

où $d_v(x,\mathscr{B}) = \inf_{z\in\mathscr{B}} d_v(x,z)$. En particulier, ces points sont en nombre fini si $\mathscr{L}$ est ample.

Démonstration : D'après le lemme 4.5.3, les hypothèses $y \notin \mathscr{B}$ et $y \neq x$ entraînent $y \notin \mathscr{B}(F_r)$. Le premier point est alors une conséquence immédiate du théorème 4.5.2. Supposons de plus que $x \notin \mathscr{B}$. Soit $y \in X(K)$ un point distinct de x satisfaisant l'inégalité (37). Si $y \notin \mathscr{B}$, le point 2 est une conséquence du point 1. Si $y \in \mathscr{B}$, alors $d_v(x,y) \geq d_v(x,\mathscr{B})$, donc

$$h_{\mathscr{L}}(y) \leq -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]}+\varepsilon\right)^{-1}\log(d_v(x,\mathscr{B})).$$

□

Remarque 4.5.5. Le corollaire 4.5.4 implique le théorème 4.1.2 de la façon suivante. Dans le théorème 4.1.2 intervient le lieu de base stable $\mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma)$ de $\mathscr{L}_\gamma \in \mathrm{Pic}_{\mathbb{Q}}(\widetilde{X})$ à la place de $\mathscr{B}(r\mathscr{L}_\gamma)$. Mais d'après la proposition 2.1.21 de [**52**], on peut choisir r tel que $\mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma) = \mathscr{B}(r\mathscr{L}_\gamma)$. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 4.5.4 avec ce choix de r pour obtenir le théorème 4.1.2. En pratique, il peut cependant s'avérer difficile de déterminer un entier r tel que $\mathbf{B}(\mathscr{L}_\gamma) = \mathscr{B}(r\mathscr{L}_\gamma)$. Cette difficulté est atténuée par le fait que le théorème 4.5.2 et le corollaire 4.5.4 sont valables pour tout entier r non nul tel que $r\gamma \in \mathbb{N}$, pourvu que l'on ne considère que des points $y \in X(K)$ en dehors de $\mathscr{B}(F_r)$ et $\mathscr{B}(r\mathscr{L}_\gamma)$.

Nous allons maintenant voir que dans le cas où $\mathscr{L}$ est ample et $\gamma < \epsilon_x(\mathscr{L})$, il est possible de remplacer $\mathscr{B}$ par $\{x\}$ sans considérer d'entier r arbitrairement grand dans le corollaire 4.5.4, à condition que $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)$ soit muni de métriques convenables au sens de la définition suivante.

Définition 4.5.6. Nous dirons qu'une métrique adélique sur $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)$ vérifie la condition (A) si pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$ tel que $p(\pi^*\mathscr{L}) - qE$ soit ample, la métrique induite sur $p\pi^*\mathscr{L} - qE$ est semi-positive et vérifie : pour tout point $z \in (\widetilde{X}\setminus E)(\mathbb{C}_v)$ et pour toute section globale $\widetilde{s}$ de $p(\pi^*\mathscr{L}) - qE$ ne s'annulant pas en z, pour toute place $v \in \Sigma_L$

$$\|\widetilde{s}(z)\|_v = \|s(\pi(z))\|_v,$$

où s est la section de $p\mathscr{L}$ associée à $\widetilde{s}$ du lemme 4.5.3.

On obtient le théorème suivant, qui est à mettre en parallèle avec le théorème 4.3.2.

Théorème 4.5.7. *Supposons que $\mathscr{L}$ est ample et que le fibré $\mathscr{O}_{\widetilde{X}}(E)$ est muni d'une métrique vérifiant la condition (A). Soit $0 < \gamma < \epsilon_x(\mathscr{L})$ un nombre rationnel. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout point $y \in X(K)$ distinct de x satisfaisant l'inégalité*

$$\log(d_v(x,y)) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]}+\varepsilon\right)h_{\mathscr{L}}(y),$$

la hauteur $h_{\mathscr{L}}(y)$ est majorée par

$$\max\left\{\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]}+\varepsilon\right)^{-1}a(v)\log 2, \frac{1}{\varepsilon}\max\{c_1(\mathscr{L},x), c_3(\mathscr{L},x,\gamma)\}\right\},$$

où

$$c_1(\mathscr{L},x) = 2a(v)\log 2 - 2\log(\rho_x(\mathscr{L})),$$

et

$$c_3(\mathscr{L},x,\gamma) = -\frac{2[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]}\left(\mathrm{e}(\overline{\mathscr{L}}) + \gamma\min\{0, \inf_{z\in E(\overline{\mathbb{Q}})} h_{\mathscr{O}(-E)}(z)\}\right).$$

En particulier, ces points sont en nombre fini.

Remarquons que le fibré $\mathscr{O}(-E) = \mathscr{O}_{\widetilde{X}}(1)$ est un fibré ample, donc la quantité

$$\inf\{h_{\mathscr{O}(-E)}(z) \mid z \in E(\overline{\mathbb{Q}})\}$$

du théorème est bien finie.

Démonstration : Comme $\gamma < \epsilon_x(\mathscr{L})$, $\mathscr{L}_\gamma$ est ample. Soit m un entier non nul tel que $m\gamma \in \mathbb{N}$ et soit $r \in \mathbb{N}$ tel que $rm\mathscr{L}_\gamma$ soit très ample (en particulier $\mathscr{B}(rm\mathscr{L}_\gamma)) = \emptyset$). On note

$n_v = \frac{[L:\mathbb{Q}]}{[L_v:\mathbb{Q}_v]}$. Soient ε un nombre réel strictement positif et $y \in X(K)$ un point distinct de x tel que

$$\log(d_v(x,y)) < -(n_v/\gamma + \varepsilon)h_{\mathscr{L}}(y).$$

Soit $\widetilde{s} \in \mathrm{H}^0(\widetilde{X}, rm\mathscr{L}_\gamma) \setminus \{0\}$. D'après le lemme 4.5.3, il existe une section non nulle $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathscr{L}^{rm} \otimes I_x^{rm\gamma})$ telle que $\widetilde{s}_{|\widetilde{X}\setminus E} = \pi^*(s_{|X\setminus\{x\}})$. On peut supposer que $h_{\mathscr{L}}(y) > (\frac{n_v}{\gamma} + \varepsilon)^{-1}a(v)\log 2$; ainsi l'hypothèse du lemme 4.5.1 est satisfaite et d'après la condition (A) on a

$$\begin{aligned}\|\widetilde{s}(\pi^{-1}(y))\|_v = \|s(y)\|_v &\leq \left(2^{a(v)}\frac{d_v(x,y)}{\rho_x(\mathscr{L})}\right)^{rm\gamma}\|s\|_{v,\sup}\\ &\leq \left(2^{a(v)}\frac{d_v(x,y)}{\rho_x(\mathscr{L})}\right)^{rm\gamma}\|\widetilde{s}\|_{v,\sup}.\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}h_{rm\mathscr{L}}(y) &= -\sum_{v\in\Sigma_L}\frac{[L_v:\mathbb{Q}_v]}{[L:\mathbb{Q}]}\log\|s(y)\|_v\\ &= -\sum_{v\in\Sigma_L}\frac{[L_v:\mathbb{Q}_v]}{[L:\mathbb{Q}]}\log\|\widetilde{s}(\pi^{-1}(y))\|_v = h_{rm\mathscr{L}_\gamma}(\pi^{-1}(y)).\end{aligned}$$

On raisonne maintenant comme dans la preuve du théorème 4.5.2 en appliquant le corollaire 4.4.2 à $\mathrm{H}^0(\widetilde{X}, rm\mathscr{L}_\gamma)$ au lieu de F_r. La constante $c'(\mathscr{L}, x)$ qui apparaît à la fin de la démonstration du théorème 4.5.2 est alors remplacée par $\frac{1}{m}\lambda_{\max}(\overline{rm\mathscr{L}_\gamma})$. D'après la proposition 1.5.4, on a

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\lambda_{\max}(\overline{rm\mathscr{L}_\gamma}) = -\mathrm{e}(\overline{m\mathscr{L}_\gamma}).$$

En utilisant à nouveau la condition (A), on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{e}(\overline{m\mathscr{L}_\gamma}) &= \inf\{h_{m\mathscr{L}_\gamma}(z) \mid z \in \widetilde{X}(\overline{\mathbb{Q}})\}\\ &= m\min\left(\inf_{\substack{a\in X(\overline{\mathbb{Q}})\\ a\neq x}} h_{\mathscr{L}}(a), h_{\mathscr{L}}(x) + \gamma\inf\{h_{\mathscr{O}(-E)}(z) \mid z \in E(\overline{\mathbb{Q}})\}\right)\\ &\geq m\mathrm{e}(\overline{\mathscr{L}}) + m\gamma\min\{0, \inf_{z\in E(\overline{\mathbb{Q}})} h_{\mathscr{O}(-E)}(z)\},\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve.

□

Voyons maintenant comment le corollaire 4.5.4 implique le corollaire 4.1.3. Ainsi que nous l'avons rappelé dans la partie 3, si $\mathscr{L}$ est ample alors $\epsilon_x(\mathscr{L}) > 0$. Considérons un nombre réel strictement positif $\gamma < \epsilon_x(\mathscr{L})$; alors pour r suffisamment grand, $\mathscr{B}(r\mathscr{L}_\gamma) = \emptyset$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $y \in X(K)$ un point distinct de x. Si γ est suffisamment proche de $\epsilon_x(\mathscr{L})$ et si $h_{\mathscr{L}}(y) \geq 0$, on a l'implication

$$\begin{aligned}&\log(d_v(x,y)) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\epsilon_x(\mathscr{L})[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \varepsilon\right)h_{\mathscr{L}}(y)\\ \Longrightarrow\ &\log(d_v(x,y)) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \frac{\varepsilon}{2}\right)h_{\mathscr{L}}(y).\end{aligned}$$

On obtient alors le corollaire 4.1.3 en posant

$$b(\mathscr{L}, x) = \varepsilon\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]}\right)^{-1}a(v)\log 2 + 2\max\{0, c_1(\mathscr{L}, x), c_2(\mathscr{L}, x, \gamma, r)\},$$

où $c_1(\mathscr{L}, x)$ et $c_2(\mathscr{L}, x, \gamma, r)$ sont les constantes du corollaire 4.5.4. De plus, si l'hypothèse du théorème 4.5.7 est satisfaite, on peut remplacer la constante $c_2(\mathscr{L}, x, \gamma, r)$ par la constante

$c_3(\mathscr{L}, x, \gamma)$ du théorème 4.5.7. La propriété de Northcott implique alors qu'il n'existe qu'un nombre fini de points $y \in X(K)$ distincts de x tels que

$$\log(d_v(x,y)) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\epsilon_x(\mathscr{L})[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \varepsilon\right) h_{\mathscr{L}}(y).$$

Dans le cas où le point x n'est plus supposé régulier, les mêmes méthodes permettent de majorer la hauteur des points vérifiant (37), mais dans ce cas la constante qui intervient n'est plus explicite. L'inconvénient est que le lemme 4.5.1 ne s'applique pas et l'hypothèse du corollaire 4.4.2 n'est plus garantie. Nous pouvons cependant utiliser le corollaire 4.4.4 ; expliquons maintenant comment procéder. Soient γ un nombre rationnel et r un entier non nul tel que $r\gamma \in \mathbb{N}$, ε un nombre réel strictement positif et $y \in (X \setminus \mathscr{B})(K)$ ($\mathscr{B}$ désigne encore l'image par π du lieu de base de $r\mathscr{L}_\gamma$) tel que

$$\log(d_v(x,y)) < -\left(\frac{[L:\mathbb{Q}]}{\gamma[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \varepsilon\right) h_{\mathscr{L}}(y).$$

On note $V = \mathrm{H}^0(X, r\mathscr{L})$ et F_r le sous-espace de V des sections s'annulant à l'ordre $r\gamma$ en x. On considère la filtration de V donnée par le drapeau

$$V \supset F_r \supset \{0\}$$

et les nombres réels $c_0 = 0 < c_1 = \frac{[L:\mathbb{Q}]}{[L_v:\mathbb{Q}_v]} + \gamma\varepsilon/2$. Il existe des générateurs $(u_1, \ldots, u_t)$ de l'idéal maximal défini par x tels que si $d_v(x,z)$ est suffisamment petite, alors

$$\max(|u_1(z)|_v, \ldots, |u_t(z)|_v) \leq 2^{a(v)} d_v(x,z)$$

(on utilise ici les mêmes arguments qu'au début de la preuve du lemme 4.5.1 ainsi que le lemme 4.3.1). On en déduit que si la hauteur de y est suffisamment grande, $|u_i(y)|_v \leq 2^{a(v)} d_v(x,y)$ pour tout $1 \leq i \leq t$. En considérant un recouvrement de $\widetilde{X}$ par des ouverts affines et l'égalité

$$r\mathscr{L}_\gamma = (\pi^{-1}\mathscr{L})^{\otimes r} \otimes_{\pi^{-1}\mathscr{O}_X} (\pi^{-1}I_x)^{\otimes r\gamma} \otimes_{\pi^{-1}\mathscr{O}_X} \mathscr{O}_{\widetilde{X}},$$

(voir la preuve du lemme 4.5.3), on peut supposer que y n'appartient pas à $\mathscr{B}(F_r)$. Soit U un ouvert de X contenant x et $s_0 \in \mathrm{H}^0(X, r\mathscr{L})$ une section ne s'annulant pas sur U. On choisit une base $(s_1, \ldots, s_{\dim F})$ de F_r avec

$$s_i = s_0 \cdot f_i \sum_{\substack{\alpha_{i1}+\cdots+\alpha_{it}=mr\gamma \\ \alpha=(\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{it})}} a_\alpha u_1^{\alpha_{i1}} \cdots u_r^{\alpha_{it}},$$

où $f_i \in \mathscr{O}_X(U)$ et

$$\|s_0 \cdot f_i\|_{v,\sup} \sum_\alpha |a_\alpha|_v \leq 1. \tag{38}$$

Pour tout $1 \leq i \leq \dim F$, on a ainsi

$$\|s_i(y)\|_v \leq \max_{1\leq j\leq t}\{|u_j|_v\}^{r\gamma} \leq (2^{a(v)} d_v(x,y))^{r\gamma}.$$

En raisonnant comme dans la preuve du corollaire 4.5.4 et en utilisant le corollaire 4.4.4, on majore ainsi la hauteur des points satisfaisant le système (37). Cette majoration fait intervenir la constante du corollaire 4.4.4 (pour le cas particulier d'une place) qui dépend malheureusement de la base $(s_1, \ldots, s_{\dim F})$ choisie pour obtenir (38). Ces méthodes redonnent ainsi une généralisation du théorème de Liouville même dans le cas où le point x n'est pas régulier.

Le corollaire 4.5.4 entraîne la minoration $\alpha_x(\mathscr{L}) \geq \frac{1}{[L:K]}\epsilon_x(\mathscr{L})$ du corollaire 3.4 de [**57**] (le facteur $[L_v:\mathbb{Q}_v]$ qui apparaît dans le corollaire 4.5.4 provient d'une différence de normalisation, voir la remarque 4.2.1 page 83) et fournit une majoration pour la hauteur des points qui ne dépend pas d'un choix de métriques sur E. Remarquons que dans [**56**], les auteurs démontrent la minoration plus forte $\alpha_x(\mathscr{L}) \geq \frac{1}{2}\epsilon_x(\mathscr{L})$, qui généralise le théorème de Roth. Mais même dans le cas de la droite projective $X = \mathbb{P}^1_K$, aucune version effective n'existe à l'heure actuelle pour le théorème de Roth.

4.5.2. Le cas de $\mathbb{P}^n$. Dans ce paragraphe, nous considérons le cas où $X = \mathbb{P}^n_K$ et $\mathscr{L} = \mathscr{O}(1)$. Dans le cas où $n \geq 2$, l'exposant d'approximation du corollaire 4.5.4 peut être amélioré, tout en conservant une majoration effective de la hauteur des solutions. Nous préférons proposer ici une démonstration qui n'utilise pas les techniques de la partie 4.4 et qui permet d'énoncer une généralisation de la version effective du théorème de Liouville, analogue à (33). Soit $x = (x_0 : \ldots : x_n)$ un point de $\mathbb{P}^n(\overline{K}) \setminus \mathbb{P}^n(K)$ et soit v une place de $\overline{K}$. Par abus de notation, on note encore v la restriction de cette place à des sous-corps de $\overline{K}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_0 \neq 0$ et on note $x = (1 : \widetilde{x}_1 : \cdots : \widetilde{x}_n)$. Pour tout $(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}_v^{n+1}$, on note

$$|(z_0, \ldots, z_n)|_{2,v} := \begin{cases} (\sum\limits_{i=0}^{n} |z_i|_v^2)^{1/2} & \text{si } v \text{ est archimédienne,} \\ \max\{|z_0|_v, \ldots, |z_n|_v\} & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle que $a(v) = 1$ si v est archimédienne, $a(v) = 0$ sinon.

Théorème 4.5.8. *On note*

$$\theta = \min\left\{ \frac{[K(\widetilde{x}_i) : \mathbb{Q}]}{[K(\widetilde{x}_i)_v : \mathbb{Q}_v]} \mid \widetilde{x}_i \notin K \right\}.$$

Pour tout point $y = (y_0 : \ldots : y_n) \in \mathbb{P}^n(K)$ tel que $y_0 \neq 0$, on a

$$\log(d_v(x, y)) > C(x) - \theta h(y),$$

avec $C(x) = -\big(\theta h(x) + \log(|(1, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)|_{2,v}) + a(v)\frac{\theta}{2}\log(2^n(n+1))\big)$.

Démonstration : Soit $1 \leq i \leq n$ tel que $\theta = [K(\widetilde{x}_i) : K]/[K(\widetilde{x}_i)_v : \mathbb{Q}_v]$. On note $L = K(\widetilde{x}_i)$. Considérons la section

$$s = \widetilde{x}_i T_0 - T_i \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_L, \mathscr{O}(1)) \setminus \{0\}.$$

Soit $y \in \mathbb{P}^n(K)$ tel que $y_0 \neq 0$. Alors $s(y) \neq 0$ car $\widetilde{x}_i \notin K$ et $y \in X(K)$. On considère l'application surjective

$$\begin{array}{cccc} \phi\colon & L \cdot s & \to & \mathscr{L}(y) \\ & \widetilde{s} & \mapsto & \widetilde{s}(y). \end{array}$$

Supposons que la place v est finie. Alors

$$\begin{aligned} \frac{\|s(y)\|_v}{\|s\|_{v,\sup}} &= \frac{|x_0 y_i - y_0 x_i|_v}{\max_j |y_j|_v |x_0|_v \|s\|_{v,\sup}} \\ &\leq \frac{\max_{k<l} |x_k y_l - y_k x_l|_v}{\max_j |y_j|_v \max_j |x_j|_v} \cdot \max_j |\widetilde{x}_j|_v \\ &= d_v(x, y) \cdot \max_j |\widetilde{x}_j|_v. \end{aligned}$$

Dans le cas où v est archimédienne, on a de la même façon

$$\frac{\|s(y)\|_v}{\|s\|_{v,\sup}} \leq \left(1 + \sum_{i=1}^{n} |\widetilde{x}_i|_v^2\right)^{1/2} d_v(x, y).$$

On en déduit que $-h(y) - h(s) \leq \frac{1}{\theta}\log(|(1, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)|_{2,v} d_v(x, y))$. Par ailleurs, $h(s) \leq \frac{a(v)}{2}\log(2^n(n+1)) + h(x)$ (voir [**49**]). On a donc

$$\frac{1}{\theta}\log(|(1, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)|_{2,v} d_v(x, y)) \geq -(h(y) + h(x) + \frac{a(v)}{2}\log(2^n(n+1))),$$

d'où

$$\log(d_v(x, y)) \geq -\theta h(y) + C(x),$$

avec $C(x) = -\big(\theta h(x) + \log(|(1, \widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_n)|_{2,v}) + a(v)\frac{\theta}{2}\log(2^n(n+1))\big)$.

$\square$

Dans le cas où $n = 1$, l'exposant θ est égal à l'exposant $\frac{[L:\mathbb{Q}]}{[L_v:\mathbb{Q}_v]}$ du corollaire 4.5.4, où L est le corps de définition de x. Cependant dès que $n \geq 2$, l'exposant du théorème 4.5.8 peut être strictement inférieur à $\frac{[L:\mathbb{Q}]}{[L_v:\mathbb{Q}_v]}$. Remarquons que dans l'article [**56**], les auteurs obtiennent un meilleur exposant ($\frac{m}{m+1}$, où m est la dimension du plus petit sous-espace linéaire contenant $x \in \mathbb{P}^n(\overline{K}) \setminus \mathbb{P}^n(K)$). Une fois de plus, l'intérêt du théorème 4.5.8 est qu'il donne une majoration explicite de la hauteur des solutions.

Partie 2

Théorie des formes linéaires de logarithmes dans le cas rationnel

Chapitre 5

Introduction

Dans cette partie, nous établissons des mesures d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif G défini sur un corps de nombres K. Considérons une place v de K et notons $t_G(\mathbb{C}_v)$ l'algèbre de Lie du groupe de Lie v-adique $G(\mathbb{C}_v)$. Soit V un sous-espace vectoriel strict de $t_G(\mathbb{C}_v)$, défini sur K (i.e. V est le lieu d'annulation de formes linéaires à coefficients dans K). Nous cherchons à minorer la distance $d_v(u, V)$ séparant V et un vecteur $u \in t_G(\mathbb{C}_v) \setminus V$, dans le cas où le point $\mathbf{p} := \exp_v(u)$ appartient à $G(K)$. Ici, $\exp_v$ désigne l'application exponentielle du groupe de Lie $G(\mathbb{C}_v)$, définie sur un voisinage de 0 dans $t_G(\mathbb{C}_v)$ et à valeurs dans $G(\mathbb{C}_v)$, et la distance d_v est associée à une norme donnée $\|.\|_v$ sur $t_G(\mathbb{C}_v)$. Notons Ω_G le réseau des périodes de G, défini comme le noyau de l'application exponentielle $\exp_v$, et $g = \dim G$. On fixe une K-base de t_G, qui munit cet espace vectoriel d'une structure de fibré adélique hermitien (voir l'exemple 1.1.3 page 28). Classiquement, si $u \notin V$, une mesure (simultanée) d'indépendance de logarithmes minore $d_v(u, V)$ en fonction de la hauteur $h(\mathbf{p})$ du point $\mathbf{p}$ et la hauteur $h(V)$ du sous-espace V. Pour simplifier, nous supposons que la place v est archimédienne dans cette introduction. Nous nous concentrons sur le cas rationnel, où V est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique H de G, défini sur K. L'objectif principal de ce travail est de généraliser les théorèmes de l'article [**35**] de Gaudron, qui donnent les meilleures minorations connues en terme de la hauteur $h(\mathbf{p})$ de $\mathbf{p}$. Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction générale, ceux-ci ne traitent pas le cas dit périodique, et imposent systématiquement l'hypothèse suivante : pour tout sous-groupe algébrique G' de G tel que $t_{G'}(\mathbb{C}_v) + V \neq t_G(\mathbb{C}_v)$ et pour tout entier naturel k non nul, alors $ku \notin t_{G'}(\mathbb{C}_v) + \Omega_G$ (ou, de façon équivalente, $k\mathbf{p} \notin G'(\overline{K})$). Cette hypothèse peut s'avérer très contraignante, et exclut par exemple le cas où $\mathbf{p}$ est un point de torsion. Le cas périodique pose de sérieux problèmes lorsque l'on cherche à adapter la méthode de Baker dans le cadre général. En particulier, il empêche d'appliquer les méthodes classiques à deux étapes clés de la démonstration, à savoir la majoration du rang d'un système d'équations linéaire et l'application d'un lemme de multiplicités. L'inconvénient est que ces deux points font intervenir certains sous-groupes de G, appelés sous-groupes obstructeurs, et que les arguments classiques sont mis en échec si un multiple de $\mathbf{p}$ appartient à ces sous groupes. Rappelons maintenant l'argument clé qui a permis en premier lieu à Philippon et Waldschmidt d'intégrer le cas périodique dans leurs démonstrations de mesures d'indépendance linéaires de logarithmes [**66, 67**] pour un groupe algébrique commutatif quelconque. Il repose sur l'énoncé suivant, démontré par Bertrand et Philippon [**4**].

Proposition 5.0.1 (Bertrand-Philippon, 1988). *Supposons que la place v est archimédienne. Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout sous-groupe algébrique G' de G et pour toute période $\omega \in \Omega_G \setminus t_{G'}(\mathbb{C}_v)$, l'inégalité*

$$\mathrm{d}_v(\omega, t_{G'}(\mathbb{C}_v)) \geq \frac{1}{c_1 \deg G'}$$

est vérifiée.

Dans les articles [**66**] et [**67**], Philippon et Waldschmidt ont utilisé cette proposition de façon très astucieuse pour mettre en place une extrapolation sur les dérivations (inspirée par les travaux de Gel'fond). Ceci conduit à un choix de paramètres très différents pour traiter le cas périodique, et supprime les difficultés introduites par les sous-groupes obstructeurs. Cette méthode ingénieuse est devenue très classique en théorie des formes linéaires de logarithmes depuis ; elle est par exemple appliquée dans les travaux de Hirata-Kohno [**46, 47**], David [**17**], Gaudron [**33, 38**], ou encore Bosser et Gaudron [**7**] (dans le langage plus moderne des fibrés vectoriels adéliques pour les deux dernières références). Malheureusement, si l'on introduit une extrapolation sur les dérivations dans la démonstration de [**35**], la minoration obtenue est fortement dégradée : elle perd son caractère optimal en $h(\mathbf{p})$ et elle n'améliore pas de résultat connu. C'est la raison pour laquelle l'hypothèse $t_{G'}(\mathbb{C}_v) + V \neq t_G(\mathbb{C}_v) \implies \forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, ku \notin t_{G'}(\mathbb{C}_v) + \Omega_G$ est indispensable pour obtenir les mesures d'indépendance linéaire de logarithme recherchées dans la démonstration de [**35**]. Dans cette partie, nous parvenons à retrouver tous les théorèmes de [**35**] en remplaçant l'hypothèse ci-dessus par : pour tout sous-groupe algébrique G' de G tel que $t_{G'}(\mathbb{C}_v) + V \neq t_G(\mathbb{C}_v)$, le vecteur u n'appartient pas à $t_{G'}(\mathbb{C}_v)$. Notre hypothèse est bien plus faible que celle de [**35**] ; par exemple, quand V est un hyperplan (qui est la situation généralisant le cas historique de la théorie, traitant d'une forme linéaire de logarithme), cette condition signifie simplement que le point u n'appartient pas à V. Par ailleurs, dans le cas où $\dim V < g - 1$ (qui correspond à la minoration simultanées de plusieurs formes linéaires de logarithmes), cette hypothèse est courante dans la littérature, et figure par exemple dans les travaux de Philippon et Waldschmidt [**66**] et Hirata-Kohno [**47**].

Nous allons maintenant résumer la nouveauté principale de ce travail, qui introduit une nouvelle méthode pour traiter le cas périodique. Celle-ci repose sur la démonstration d'une généralisation de la proposition 5.0.1 de Bertrand et Philippon, dont une conséquence est l'énoncé suivant.

LEMME 5.0.2 (Corollaire du lemme 6.4.3). *Il existe une constante $c_2 \geq 1$ vérifiant la propriété suivante. Soit $\widetilde{G}$ un sous-groupe algébrique strict et connexe de G et soit S un entier naturel non nul. Supposons que pour tout sous-groupe algébrique strict et connexe G' de G tel que $t_{G'}(\mathbb{C}_v) + V \neq t_G(\mathbb{C}_v)$, on ait $u \notin t_{G'}(\mathbb{C}_v)$ et que $t_{\widetilde{G}}(\mathbb{C}_v) + V \neq t_G(\mathbb{C}_v)$. Alors on a l'implication*

$$d_v(u, V) < \frac{1}{S \deg(\widetilde{G}) \exp(c_2 \max\{1, h(V)\})} \implies \forall s \in \{1, \dots, S\},\ s\mathbf{p} \notin \widetilde{G}(\overline{K}).$$

La démonstration de ce résultat nécessite une étude minutieuse des liens entre le degré d'un sous-groupe et la hauteur de son espace tangent, au moyen d'un « dévissage » grâce à une décomposition de Chevalley, et repose sur des résultats intermédiaires sur les liens entre les sous-groupes algébriques de G et leurs algèbres de Lie. Ce travail constitue l'objet du chapitre 6. Nous appliquons ensuite ce lemme de façon systématique, pour montrer que si la distance $d_v(u, V)$ ne satisfait pas la minoration voulue, alors les sous-groupes obstructeurs de G ne contiennent pas de grands multiples de $\mathbf{p}$. De cette façon, nous montrons que le cas périodique ne peut pas se produire, et nous évitons d'avoir recours à une extrapolation sur les dérivations. Une autre caractéristique importante de notre démonstration est d'utiliser le formalisme des fibrés adéliques hermitiens. Le schéma de notre preuve adapte les arguments novateurs de l'article [**38**] de Gaudron, qui traite du cas de groupes linéaires. Nous intégrons ainsi les outils de la théorie des pentes à la méthode de Baker ; en particulier, nous construisons une section auxiliaire au moyen du lemme de Siegel approché absolu du paragraphe 1.1 (lemme 1.1.22 page 34). L'ensemble de ces arguments, combiné à un choix adapté de paramètres, nous permettent de démontrer des mesures d'indépendance linéaire de logarithmes légèrement plus précises que celles obtenues par Gaudron dans [**35**] sans l'hypothèse que le sous-groupe engendré par $\mathbf{p}$ a une intersection nulle avec les sous-groupes stricts de G. Une conséquence des théorèmes que nous démontrons est la suivante.

THÉORÈME 5.0.3. *Il existe une constante $c_3 \geq 1$, indépendante de $h(V)$ et de $h(\mathbf{p})$, ayant la propriété suivante. Soit $t = \mathrm{codim}_{t_G}(V)$. Supposons que pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G tel que $t_{G'}(\mathbb{C}_v) + V \neq t_G(\mathbb{C}_v)$, on ait $u \notin t_{G'}(\mathbb{C}_v)$ (cette condition est automatiquement vérifiée si $t = 1$ et $u \notin V$). Alors $u \notin V$ et*

$$\log d_v(u, V) \geq -c_3 \max\{1, h(V)\}^{1+\frac{g+1}{t}} \max\{1, h(\mathbf{p})\}^{g/t}.$$

Cet énoncé sera rendu beaucoup plus précis au paragraphe 7.2. Nous en donnerons également des versions valables pour une place finie v de K.

Introduction to part two (English version)

In this part, we establish new measures of linear independence of logarithms over a commutative algebraic group G defined over a number field K. Let v be a place of K and let V be a subspace of the Lie algebra $t_G(\mathbb{C}_v)$ of the v-adic Lie group $G(\mathbb{C}_v)$. We suppose that the subspace V is defined over K. We denote by $\exp_v$ the exponential map of $G(\mathbb{C}_v)$ and by d_v the distance function associated to a given norm on $t_G(\mathbb{C}_v)$. We are looking for lower bounds for the distance $d_v(u, V)$ between V and a vector $u \in t_G(\mathbb{C}_v) \setminus V$ with $\mathbf{p} := \exp_v(u) \in G(K)$. Let Ω_G be the lattice of periods of G, that is the kernel of the exponential map $\exp_v$. We put $g = \dim G$ and we fix a K-basis $\mathbf{e}$ for t_G. Let $h(V)$ be the height of V associated to $\mathbf{e}$ (see example 1.1.3 and definition 1.1.7). In our study, we shall focus on the rational case, where V is the Lie algebra of an algebraic subgroup H of G defined over K. We will generalize the results of the article [**35**] of Gaudron, which give the best currently known lower bounds for $d_v(u, V)$ in terms of the height $h(\mathbf{p})$ of the point $\mathbf{p}$. As we mentioned in the general introduction, the latter article doesn't deal with the periodic case, and all the theorems in [**35**] contain the following assumption : for all algebraic subgroup G' of G with $t_{G'}(\mathbb{C}_v) + V \neq t_G(\mathbb{C}_v)$ and for all positive integer k, ku does not belong to $t_{G'}(\mathbb{C}_v) + \Omega_G$ (or, equivalently, $k\mathbf{p} \notin G'(\overline{K})$). This assumption is particularly restrictive ; for example, it excludes the case where $\mathbf{p}$ is a torsion point. The main purpose of this part is to remove this hypothesis and to recover the results of [**35**]. In the periodic case, serious problems arise when one tries to adapt Baker's arguments in the general setting of an arbitrary commutative algebraic group G. Two key points in the demonstration, namely the control of the rank of a linear system and the application of a multiplicity lemma, involve particular subgroups of G, called obstruction subgroups. The usual argumentation fails when too many multiples of $\mathbf{p}$ belong to these subgroups, and that is why the technical assumption on $\mathbf{p}$ is introduced in [**35**]. We shall now briefly recall how Philippon and Waldschmidt [**66, 67**] first managed to deal with the periodic case to prove lower bounds for linear forms in logarithms in the general case. Their arguments rely on the following result, due to Bertrand and Philippon [**4**].

Proposition 5.0.4. *If v is archimedean, there exists a constant $c_4 > 0$ such that for all algebraic subgroup G' of G and for all period $\omega \in \Omega_G \setminus t_{G'}(\mathbb{C}_v)$, we have*

$$d_v(\omega, t_{G'}(\mathbb{C}_v)) \geq \frac{1}{c_4 \deg G'}.$$

For the sake of simplicity, we assume that the place v is archimedean in the rest of this introduction. In their articles [**66**] and [**67**], Philippon and Waldschmidt applied proposition 5.0.4 to set up an extrapolation on derivations, inspired by the works of Gel'fond. This leads to a specific choice of parameters for the periodic case, and makes the difficulties introduced by obstruction subgroups disappear. This method has become very classical in the theory of linear forms in logarithms ; for example, it has been used in the works of Hirata-Kohno [**46, 47**], David [**17**], Gaudron [**33, 38**], and Bosser and Gaudron [**7**] (in the modern formalism of adelic slope theory for the two latter articles). Unfortunately, it turns out that if we introduce an extrapolation on derivations in the proof of [**35**], the conclusion is strongly weakened, and the lower bound we obtain does not improve already known results. This is the reason why the assumption $t_{G'}(\mathbb{C}_v) + V \neq t_G(\mathbb{C}_v) \implies \forall \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, ku \notin t_{G'}(\mathbb{C}_v) + \Omega_G$ is essential in [**35**]. In this work, we manage to replace it by the following condition : there is no connected algebraic subgroup G' of G with $t_{G'}(\mathbb{C}_v) + V \neq t_G(\mathbb{C}_v)$ and $u \in t_{G'}(\mathbb{C}_v)$. The latter is much less restrictive than the assumption of [**35**] ; for example, when the subspace V is a hyperplane (which is the situation that generalizes the classical setting of the theory, namely the study of *one* linear form in logarithm), it is nothing but the natural condition $u \notin V$. When $\dim V < g - 1$, our assumption is common in the literature related to the study of several linear forms in logarithms ; for example, it appears in the work of Philippon and Waldschmidt [**66**] and Hirata-Kohno [**47**].

We shall now outline the main new features of our work, in which we introduce a new method to deal with the periodic case. Our approach relies on the proof of a generalization of proposition 5.0.4, which leads to the following result.

LEMMA 5.0.5 (Corollary of lemma 6.4.3). *There exists a constant $c_5 > 0$ with the following property. Let $\widetilde{G}$ be a proper connected algebraic subgroup of G with $t_{\widetilde{G}}(\mathbb{C}_v) + V \neq t_G(\mathbb{C}_v)$ and let S be a positive integer. Assume that for any proper connected algebraic subgroup G' of G with $t'_G(\mathbb{C}_v) + V \neq t_G(\mathbb{C}_v)$, the vector u does not belong to $t_{G'}(\mathbb{C}_v)$. Then we have*

$$d_v(u, V) < \frac{1}{S \deg(\widetilde{G}) \exp(c_5 \max\{1, h(V)\})} \implies \forall s \in \{1, \dots, S\},\ s\mathbf{p} \notin \widetilde{G}(\overline{K}).$$

We will give the proof of lemma 5.0.5 in chapter 6. It requires a careful study of the links between the degree of an algebraic subgroup and the height of its tangent space, by means of a « dévissage » and a decomposition theorem due to Chevalley. It also relies on preliminary results on algebraic subgroups and Lie algebras. We will then apply lemma 5.0.5 to show that if the distance $d_v(u, V)$ is too small, then the obstruction subgroups of G can not contain many multiples of $\mathbf{p}$. In this way, we show that we are not in the periodic case, and we avoid the use of an extrapolation on derivations. Another important feature in our method is to use the adelic vector bundles formalism. We adapt the innovative argumentation of the article [**38**] of Gaudron, which deals with linear groups and integrates tools of adelic slope theory into Baker's method. In particular, the auxiliary polynomial is constructed by applying the small values Siegel's lemma of section 1.1 (lemma 1.1.22, page 34). Together with an appropriate choice of parameters, our argumentation allows us to establish measures of linear independence of logarithms which are slightly more precise than the ones obtained by Gaudron in [**35**], without the hypothesis that no nonzero multiples of $\mathbf{p}$ are contained in a proper algebraic subgroup of G. A consequence of our main results is the following.

THÉORÈME 5.0.6. *There exists a constant $c_6 \geq 1$, independent of $h(V)$ and $h(\mathbf{p})$, with the following property. We put $t = \operatorname{codim}_{t_G}(V)$. Assume that for any algebraic subgroup G' of G with $t_{G'}(\mathbb{C}_v) + V \neq t_G(\mathbb{C}_v)$, we have $u \notin t_{G'}(\mathbb{C}_v)$ (this condition is satisfied if $t = 1$ and $u \notin V$). Then $u \notin V$ and we have*

$$\log d_v(u, V) \geq -c_6 \max\{1, h(V)\}^{1+\frac{g+1}{t}} \max\{1, h(\mathbf{p})\}^{g/t}.$$

We will give much more precise and general versions of this theorem in section 7.2.

Chapitre 6

Résultats préliminaires sur les groupes algébriques commutatifs

Dans tout ce chapitre, on fixe un corps de nombres K et on considère une clôture algébrique $\overline{K}$ de K.

6.1. Premières définitions

6.1.1. Polynôme de Hilbert-Samuel et degré d'une variété quasi-projective. Si V est une sous variété quasi-projective d'un produit d'espaces projectifs $\mathbb{P} = \mathbb{P}_K^{N_0} \times \cdots \times \mathbb{P}_K^{N_n}$, rappelons que l'on a noté $\deg V$ le degré de l'adhérence de Zariski $\overline{V}$ de V dans $\mathbb{P}$ relatif au faisceau $\mathscr{O}_{\mathbb{P}}(1, \ldots, 1)$ (voir le paragraphe 1.4). Si $H(V; X_0, \ldots, X_n)$ désigne le polynôme de Hilbert-Samuel de $\overline{V}$, on note $\mathscr{H}(V; X_0, \ldots, X_n)$ la partie homogène de plus haut degré ($= \dim V$) de $H(V; X_0, \ldots, X_n)$ multipliée par $(\dim V)!$. Les coefficients de $\mathscr{H}(V; X_0, \ldots, X_n)$ sont des entiers de somme égale à $\deg V$. On a ainsi $\deg V = \mathscr{H}(V; 1, \ldots, 1)$. Le polynôme $\mathscr{H}(V; X_0, \ldots, X_n)$ vérifie les propriétés suivantes (voir [**34**, § 5.3]) :

- Si $V = V_0 \times \cdots \times V_n$ est un sous-schéma produit de $\mathbb{P}$, alors
$$\mathscr{H}(V; X_0, \ldots, X_n) = (\dim V)! \prod_{i=0}^{n} \frac{\mathscr{H}(V_i; X_i)}{(\dim V_i)!}.$$
- Si $\ell \in \{0, \ldots, n\}$ et si π désigne la projection de V sur les $\ell + 1$ premiers facteurs de $\mathbb{P}$, alors pour tout $(x_0, \ldots, x_n) \in [1, +\infty[^{n+1}$, l'inégalité suivante est vérifiée :
$$\binom{\dim V}{\dim \pi(V)} \mathscr{H}(\pi(V); x_0, \ldots, x_\ell) \leq \mathscr{H}(V; x_0, \ldots, x_n).$$

6.1.2. Schémas en groupes.

Définition 6.1.1. Un groupe algébrique sur K est un schéma en groupes de type fini sur $\mathrm{Spec}(K)$. Un sous-groupe algébrique d'un groupe algébrique sur K est un sous-schéma en groupes fermé. Un groupe algébrique est dit linéaire si le schéma sous-jacent est affine.

Définition 6.1.2. Si G et G' sont deux groupes algébriques sur K, un morphisme de schémas $f : G \to G'$ est appelé morphisme de groupes algébriques si pour tout schéma S sur $\mathrm{Spec}(K)$, $f_S : G(S) \to G'(S)$ est un morphisme de groupes.

Dans toute cette partie, on fixe un groupe algébrique commutatif et connexe G défini sur K. Pour tout sous-groupe algébrique G' de G, note $t_{G'}$ l'espace tangent à l'origine de G' (vu comme un espace vectoriel sur K). Pour toute extension L de K, on note également $t_{G'}(L) := t_{G'} \otimes_K L$.

6.2. Groupe engendré par des sous-groupes algébriques

On note $m : G \times_K G \to G$ la loi de composition interne de G. Si S est un schéma sur $\mathrm{Spec}(K)$ et si $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ sont deux points de $G(S)$, on notera pour simplifier $m(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} + \mathbf{q}$. Soient A et B deux sous-groupes algébriques de G. Alors $A \times_K B$ est un sous-groupe algébrique de $G \times_K G$ et
$$f = m_{|A \times_K B} : A \times_K B \to G$$

est un morphisme de groupes algébriques. On note $A+B=f(A\times_K B)$. Pour tout $\operatorname{Spec}(K)$-schéma S,

$$(A+B)(S)=\{a+b \mid a\in A(S),\ b\in B(S)\}$$

est un sous-groupe de $G(S)$ par commutativité. De plus $A+B$ est fermé d'après [**11**, proposition 2.7.1], donc c'est un sous-groupe algébrique de G.

6.2.1. Décomposition de l'espace tangent. L'objectif de ce paragraphe est de démontrer le lemme suivant.

LEMME 6.2.1. *Les $K-$espaces vectoriels t_{A+B} et t_A+t_B sont égaux.*

Démonstration : Comme A et B sont des sous-groupes algébriques de $A+B$, t_A+t_B est un sous-espace vectoriel de t_{A+B}. Remarquons que $A\cap B$ est un sous-schéma en groupes fermé de G. Pour tout schéma S sur $\operatorname{Spec}(K)$, on a une suite exacte de groupes

$$1\to (A\cap B)(S)\xrightarrow{\alpha}(A\times_K B)(S)\xrightarrow{f}(A+B)(S)\to 1,$$

où $\alpha(g)=(g,-g)$ (rappelons que $f((a,b))=a+b$). D'après le lemme 5.2.1 (i) de [**19**], on a donc une suite exacte

$$0\to t_{A\cap B}\to t_{A\times_K B}\to t_{A+B}\to 0.$$

De plus, on a $t_{A\times_K B}=t_A\oplus t_B$. D'après [**74**, II-V, §2.3)], pour tout $\sigma\colon K\hookrightarrow\mathbb{C}$, les algèbres de Lie $t_{A\cap B}\otimes_\sigma\mathbb{C}$ et $(t_A\cap t_B)\otimes_\sigma\mathbb{C}$ sont égales, donc on a $\dim(t_{A\cap B})=\dim(t_A\cap t_B)$. On en déduit que

$$\dim(t_{A+B})=\dim(t_A)+\dim(t_B)-\dim(t_A\cap t_B)=\dim(t_A+t_B),$$

et donc $t_A+t_B=t_{A+B}$.

□

6.2.2. Majoration du degré d'un groupe engendré par des sous-groupes algébriques. Soit $\phi\colon G\hookrightarrow\mathbb{P}^N_K$ un plongement. On considère un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in I}$ de G et des $(N+1)$-uplets de polynômes $(P_i(\mathbf{X},\mathbf{Y})=(P_{i,0}(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\dots,P_{i,N}(\mathbf{X},\mathbf{Y}))_{i\in I}$ de l'anneau $K[X_0,\dots,X_N,Y_0,\dots,Y_N]$, homogènes en chacune des variables $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ et représentant localement la loi de composition interne de G : si $\mathbf{p},\mathbf{q}$ sont des points de $U_i(\overline{K})$, on a ainsi

$$\phi(\mathbf{p}+\mathbf{q})=(P_{i,0}(\phi(\mathbf{p}),\phi(\mathbf{q})):\dots:P_{i,N}(\phi(\mathbf{p}),\phi(\mathbf{q}))).$$

Soit $c_7\geq 1$ un majorant des degrés de ces polynômes.

LEMME 6.2.2. *L'inégalité suivante est vérifiée*

$$\deg(A+B)\leq c_7^{\dim G}(2\dim G)!\deg(A)\deg(B).$$

Démonstration : Rappelons que f désigne la restriction de m à $A\times_K B$. On note $V_i:=U_i\cap(A+B)$ pour tout $i\in I$. Remarquons les fibres de f sont toutes isomorphes (en tant que schémas sur $\operatorname{Spec}K$) car $f^{-1}(x)=m_{G\times G}(f^{-1}(y),(y^{-1},x))$ pour tout couple (x,y) de points de $A+B$ (rappelons que le groupe G est commutatif). Le lemme 6.2.2 est alors une conséquence de la proposition 2 de [**4**] une fois que l'on a remarqué que $\deg(A\times_K B)\leq(2\dim G)!\deg A\deg B$. Pour le confort du lecteur, nous reprenons les arguments de la démonstration ici. Pour tout sous-groupe algébrique G' de G, on note $G'_{\overline{K}}=G'\times_K\operatorname{Spec}\overline{K}$. On a l'égalité

$$\deg(A+B)=\operatorname{card}((A+B)_{\overline{K}}\cap Y) \tag{39}$$

où Y est une sous-variété linéaire de $\mathbb{P}^N_{\overline{K}}$ en position générale de codimension $d=\dim(A+B)$. Considérons des formes linéaires $L_1,\dots,L_d$ définissant Y dans $\mathbb{P}^N_{\overline{K}}$. Notons Y' la sous-variété de $\mathbb{P}^N_{\overline{K}}\times_{\overline{K}}\mathbb{P}^N_{\overline{K}}$ définie par les polynômes homogènes $L_j(P_i(\mathbf{X},\mathbf{Y}))$, $i\in I$, $1\leq j\leq d$. Ces polynômes sont de degré inférieur à c_7. Posons $Z'=Y'\cap(A_{\overline{K}}\times_{\overline{K}}B_{\overline{K}})$. D'après la proposition 3.3 de [**64**], on a l'inégalité

$$\deg Z'\leq c_7^{\dim G}\deg(A\times_K B)\leq c_7^{\dim G}(2\dim G)!\deg A\deg B.$$

Comme Z' est la réunion de $\deg(A+B)$ fibres de f d'après l'égalité (39), la proposition 8.3 de [**78**] entraîne que

$$\deg Z' \geq \deg(A+B) \min_{x\in(A+B)_{\overline{K}}\cap Y} \deg f^{-1}(x) \geq \deg(A+B).$$

En comparant avec la majoration de $\deg Z'$ obtenue précédemment, on obtient le résultat voulu.

□

6.3. Degré d'un sous-groupe et hauteur de l'espace tangent

Si le K-espace vectoriel t_G est muni d'une structure de fibré adélique, on peut considérer la hauteur $h(t_{G'})$ de l'espace tangent d'un sous-groupe algébrique G' de G (voir la définition 1.1.7 page 30). L'objectif de ce paragraphe est de comparer le degré $\deg(G')$ de G' avec cette hauteur $h(t_{G'})$ (proposition 6.3.4). Nous étudierons d'abord le cas où G est une variété abélienne ou un groupe algébrique linéaire, avant de passer au cas général par un « dévissage » au moyen d'un théorème de décomposition dû à Chevalley. Dans la suite, si G' est groupe algébrique commutatif, on note $(G')^{\circ}$ la composante neutre de G' (c'est-à-dire la composante connexe contenant l'élément neutre). On a alors $t_{G'} = t_{(G')^{\circ}}$.

6.3.1. Cas d'une variété abélienne. Considérons d'abord le cas où $G = A$ est une variété abélienne. Supposons donnée une structure de fibré adélique hermitien sur t_A et fixons un plongement projectif de A. Pour toute sous-variété abélienne B de A, on note $\deg B$ le degré de B associé à ce plongement. Le résultat suivant est une conséquence du lemme 4.8 de [**34**].

LEMME 6.3.1. *Il existe des constantes c_8, c_9 et c_{10} (ne dépendant que du choix du plongement projectif de A et de la structure de fibré adélique hermitien de t_A) telles que pour toute sous-variété abélienne B de A, on ait*

$$c_8 \log(\deg B) - c_9 \leq h(t_B) \leq c_{10} \log(\deg B) + c_9.$$

Démonstration : Supposons que la structure de fibré adélique sur t_A est associée aux formes de Riemann d'un fibré en droites très ample $\mathcal{L}$ sur A comme dans [**34**, pages 702-703], et que le plongement projectif de A correspond au choix d'une base de sections globales de $\mathcal{L}$. D'après le lemme 4.8 de [**34**], pour toute sous-variété abélienne B de A, on a dans ce cas

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{\deg B}{(\dim B)!}\right) - 3\dim B &\leq 2h(t_B) \\ &\leq 2h_F(A) + 8\dim A \log\left(\frac{\deg B}{(\dim B)!}\right) + 2\,\mathrm{codim}_A B, \end{aligned} \tag{40}$$

où $h_F(A)$ désigne la hauteur de Faltings de A, normalisée comme dans l'article [**34**]. Par ailleurs, un nouveau nouveau choix de structure de fibré adélique sur t_A ne modifie $h(t_B)$ qu'à constante près. De même, un changement de plongement projectif de A ne modifie $\deg B$ qu'à constante près (voir la remarque 2 de [**4**]). Le lemme est donc une conséquence de l'encadrement (40).

□

6.3.2. Cas d'un groupe linéaire. Traitons maintenant le cas où le groupe algébrique $G = L$ est linéaire et commutatif. Nous allons d'abord nous intéresser au cas où le groupe L est un tore. Soit n un entier naturel et soit L' un sous-groupe algébrique connexe du tore $L = \mathbb{G}_m^n$, défini sur K. On suppose donnée une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de t_L et on considère la structure de fibré vectoriel adélique hermitien associée (voir l'exemple 1.1.3 à la page 28). On a une identification $t_L \simeq K^n$ et $L(K) = \mathbb{G}_m^n(K) \simeq (K^{\times})^n$. Notons $\Omega_{L'}$ le réseau des périodes de L' ; c'est un sous groupe de $(2i\pi\mathbb{Z})^n \subset \mathbb{C}^n$. On fixe également une structure d'espace vectoriel euclidien sur $\Omega_L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et on note $\mathrm{vol}(\Omega_{L'})$ le volume fondamental de $\Omega_{L'}$.

LEMME 6.3.2. *Il existe une constante c_{11} ne dépendant que de L et des choix ci-dessus telle que pour tout sous-groupe algébrique connexe L' de L, on ait*

$$\log(\mathrm{vol}(\Omega_{L'})) - c_{11} \leq h(t_{L'}) \leq \log(\mathrm{vol}(\Omega_{L'})) + c_{11}.$$

Démonstration : Considérons un sous-réseau Λ de $\mathbb{Z}^n \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}e_i$ vérifiant :

$$L'(K) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{G}_m^n(K) \mid \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} = 1 \ \ \forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda\}.$$

On a dans ce cas

$$t_{L'} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in K^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i = 0 \ \ \forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda\}.$$

Comme L' est connexe, il est irréductible, donc Λ est primitif d'après [**84**, corollaire 4.5]). On a l'égalité $t_{L'} = \Lambda^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} K$, où $\Lambda^\perp$ est le sous-réseau de $\mathbb{Z}^n$ défini par

$$\Lambda^\perp := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}^n \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i = 0 \ \ \forall(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda\}.$$

Considérons une base $(\omega_1, \ldots, \omega_r)$ du $\mathbb{Z}$-module libre $\Lambda^\perp$. C'est une base du K-espace vectoriel $t_{L'} = \Lambda^\perp \otimes_{\mathbb{Z}} K$. Par définition de la hauteur, on a

$$h(t_{L'}) = \sum_{v \in \Sigma_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \|\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r\|_v = \log \|\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r\|_\infty + \sum_{p \text{ premier}} \log \|\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r\|_p.$$

La seconde égalité est justifiée par le fait que les coordonnées des vecteurs $\omega_1, \ldots, \omega_r$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ appartiennent à $\mathbb{Z}$. Notons A la matrice de $M_{n,r}(\mathbb{Z})$ dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\omega_1, \ldots, \omega_r$ de $\mathbb{Z}^n$. Par la formule de Cauchy-Binet,

$$\|\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r\|_\infty = |(\det A_0)_{A_0}|_{2,\infty} = |\det {}^t\!AA|^{\frac{1}{2}},$$

où A_0 parcourt les mineurs de taille $r \times r$ de A. Par ailleurs, comme $\det A_0 \in \mathbb{Z}$ pour tout mineur A_0 de taille $r \times r$, on a

$$\prod_{p \text{ premier}} \|\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_r\|_p = \prod_{p \text{ premier}} \max_{A_0} |\det A_0|_p = \prod_{p \text{ premier}} |\operatorname{pgcd}(\det A_0)_{A_0}|_p.$$

La formule du produit entraîne alors

$$\exp h(t_{L'}) = \frac{|\det {}^t\!AA|^{\frac{1}{2}}}{|\operatorname{pgcd}(\det A_0)_{A_0}|},$$

où le pgcd est pris sur l'ensemble des mineurs de taille $r \times r$ de A. Comme L' est connexe, ce pgcd est égal à 1 d'après [**84**, proposition 4.2]. Par ailleurs, on peut identifier le $\mathbb{Z}$-module Ω_L à $\mathbb{Z}^n \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}e_i$ en associant à e_k la période $2i\pi$ du k-ième facteur de $\mathbb{G}_m^n$. Si $\Omega_L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ est muni de la structure euclidienne correspondante, alors

$$\mathrm{vol}(\Omega_{L'}) = \mathrm{vol}(\Lambda^\perp) = |\det {}^t\!AA|^{\frac{1}{2}},$$

et donc $h(t_{L'}) = \mathrm{vol}(\Omega_{L'})$. Comme un changement de structure euclidienne sur $\Omega_L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ne modifie $\mathrm{vol}(\Omega_{L'})$ qu'à constante près (voir [**4**, lemme 1]), le lemme est démontré.

□

LEMME 6.3.3. *Soit L un groupe algébrique linéaire, connexe et commutatif, défini sur K. On considère un plongement ϕ de L dans un espace projectif et on note* $\deg(L')$ *le degré d'un sous-groupe algébrique L' de L associé à ce plongement. Pour toute structure de fibré adélique hermitien sur t_L, il existe une constante c_{12} telle que pour tout sous-groupe algébrique linéaire L' de L, on ait*

$$\log(\deg(L')) \leq h(t_{L'}) + c_{12}.$$

Si de plus L est un tore, on a également

$$h(t_{L'}) - c_{12} \leq \log(\deg(L')).$$

Démonstration : Il existe une extension finie K' de K et des entiers naturels ℓ, n tels que $L_{K'} = L \times_K \operatorname{Spec} K'$ soit isomorphe à $\mathbb{G}_a^\ell \times \mathbb{G}_m^n$. La hauteur $h(t_{L'})$ et le degré $\deg(L')$ intervenant dans le lemme étant invariants par extension de corps, on peut supposer sans perte de généralité que $K' = K$. Ainsi, il existe un sous-groupe L'_a (respectivement L'_m) de $\mathbb{G}_a^\ell$ (respectivement de $\mathbb{G}_m^n$) tels que L' soit isomorphe à $L'_a \times L'_m$. D'après la proposition 5 et la remarque 2 de [**4**], il existe une constante $c \neq 0$ ne dépendant pas de L' telle que

$$\frac{1}{c} \deg(L') \leq [L' : (L')^\circ] \operatorname{vol}(\Omega_{L'}) \leq c \deg(L'),$$

où $[L' : (L')^\circ]$ désigne le nombre de composantes connexes de L'. Comme

$$[L' : (L')^\circ] = [L'_m : (L'_m)^\circ] \quad \text{et} \quad \operatorname{vol}(\Omega_{L'}) = \operatorname{vol}(\Omega_{L'_m}),$$

on en déduit que

$$\frac{1}{c} \deg(L') \leq [L'_m : (L'_m)^\circ] \operatorname{vol}(\Omega_{L'_m}) = \operatorname{vol}(\Omega_{(L'_m)^\circ}) \leq c \deg L'.$$

D'après le lemme 6.3.2, il existe une constante $c' \neq 0$ telle que

$$\frac{1}{c'} \operatorname{vol}(\Omega_{(L'_m)^\circ}) \leq \exp h(t_{L'_m}) \leq c' \operatorname{vol}(\Omega_{(L'_m)^\circ})$$

(car $h(t_{L'_m}) = h(t_{(L'_m)^\circ})$). Dans le cas où L est un tore, on a $L' = L'_m$ et le lemme est démontré. Passons maintenant au cas général. Un changement de structure de fibré adélique hermitien sur t_L ne modifie la hauteur $h(t_{L'})$ qu'à constante près. On peut donc se contenter de démontrer le lemme pour une structure particulière et supposer que $t_{\mathbb{G}_a^\ell}$ et $t_{\mathbb{G}_m^n}$ sont orthogonaux et que $\widehat{\mu}_{\max}(t_{\mathbb{G}_a^\ell}) = 0$. On a ainsi

$$h(t_{L'_a}) = -\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(t_{L'_a}) \geq 0 \quad \text{et} \quad h(t_{L'}) = h(t_{L'_a}) + h(t_{L'_m}) \geq h(t_{L'_m}).$$

Finalement, on a

$$\deg(L') \leq cc' \exp h(t_{L'}),$$

et le lemme est démontré.

□

6.3.3. Cas général. Soit L le sous-groupe algébrique linéaire connexe maximal de G. D'après le théorème de décomposition de Chevalley (voir [**71**, théorème 16]), on dispose d'une suite exacte de groupes algébriques

$$1 \to L \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} A \to 1,$$

où A est une variété abélienne définie sur K. Etant donné un fibré en droites très ample sur A, on dispose d'une compactification de G comme expliqué dans l'appendice II de [**78**]. Si G' est un sous-groupe algébrique de G, on note $\deg(G')$ le degré de G' correspondant à cette compactification. On fixe également une structure de fibré adélique hermitien sur t_G.

Proposition 6.3.4. *Il existe des constantes c_{13} et c_{14} (ne dépendant que du choix de la structure de fibré adélique hermitien sur t_G et de la compactification de G) telles que pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G, on ait*

$$\log(\deg(G')) \leq c_{13} h(t_{G'}) + c_{14}.$$

Démonstration : En notant L' le groupe algébrique linéaire $G' \cap L$, on a une suite exacte

$$1 \to L' \xrightarrow{\iota} G' \xrightarrow{\pi} A' \to 1,$$

où A' est un sous-groupe algébrique de A. Comme G' est connexe, A' l'est aussi, donc A' est une sous-variété abélienne de A. Par ailleurs, $t_A = t_G / t_L$ et $t_{A'} = t_{G'} / t_{L'}$. D'après le théorème 1 de [**50**], on a

$$\deg(G') = \binom{\dim G'}{\dim A'} \deg(L') \deg(A'),$$

d'où

$$\deg(L') \deg(A') \leq \deg(G') \leq 2^{\dim(G)} \deg(L') \deg(A').$$

La structure de fibré adélique hermitien de t_G induit une structure de fibré adélique hermitien sur t_L, puis sur $t_A = t_G/t_L$ par quotient. La restriction de l'isomorphisme $\iota\colon t_G/t_L \to t_A$ à $t_{G'}/t_{L'}$ fournit un isomorphisme $\iota_{|t_{G'}/t_{L'}}\colon t_{G'}/t_{L'} \to t_{A'}$. D'après le lemme 6.3 de [**36**], on en déduit que

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(t_{G'}/t_{L'}) \leq h(\iota_{|t_{G'}/t_{L'}}) + \widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(t_{A'}) \leq h(\iota) + \widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(t_{A'}) = h(\iota) - h(t_{A'})/\dim A'.$$

D'après la proposition 1.1.10 de la page 30, on a

$$\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(t_{G'}/t_{L'}) = -h(t_{G'}/t_{L'})/\dim(t_{A'}) = ((-h(t_{G'}) + h(t_{L'}))/\dim(t_{A'})).$$

En posant $c = \dim G \max\{1, h(\iota)\}$, on a donc $h(t_{G'}) + c \geq h(t_{L'}) + h(t_{A'})$. D'après les paragraphes 6.3.1 et 6.3.2, on en déduit qu'il existe des constantes c' et c'' ne dépendant que de G telles que

$$\log(\deg(G')) \leq c' h(t_{G'}) + c'',$$

ce qui démontre la proposition 6.3.4.

□

REMARQUE 6.3.5. Nous avons démontré la proposition 6.3.4 pour un choix particulier de plongement de G dans un espace projectif. D'après la remarque 2 de [**4**], la proposition 6.3.4 reste vraie pour un degré défini par rapport à un plongement quelconque de G dans un espace projectif. Les constantes qui interviennent dans la proposition ne dépendent que de ce choix de plongement et de la structure de fibré adélique hermitien sur t_G.

6.4. Variante d'un résultat de Bertrand et Philippon

Soit $\mathcal{G}$ un groupe algébrique connexe et commutatif défini sur un corps de nombres K. On considère un plongement ϕ de $\mathcal{G}$ dans un espace projectif et on note $\deg \mathcal{A}$ le degré relatif à ϕ d'un sous-groupe algébrique $\mathcal{A}$ de $\mathcal{G}$. Soit v une place archimédienne de K. On considère une norme hermitienne $\|.\|_v$ sur $t_{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{C}_v$ et on note d_v la distance associée. Le groupe de Lie v-adique $\mathcal{G}(\mathbb{C}_v)$ est muni d'une application exponentielle exp définie sur $t_{\mathcal{G}}(\mathbb{C}_v)$ et à valeurs dans $\mathcal{G}(\mathbb{C}_v)$, qui est surjective. On note $\Omega_{\mathcal{G}}$ le réseau des périodes de $\mathcal{G}$ (qui est le noyau de l'application $\exp\colon t_{\mathcal{G}}(\mathbb{C}_v) \to \mathcal{G}(\mathbb{C}_v)$). La seconde partie du corollaire 2 de [**4**] s'énonce alors de la façon suivante :

PROPOSITION 6.4.1 (Bertrand-Philippon, 1988). *Il existe une constante $c_{15} > 0$ telle que pour tout sous-groupe algébrique $\mathcal{A}$ de $\mathcal{G}$ et pour toute période $\omega \in \Omega_{\mathcal{G}} \setminus t_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_v)$, l'inégalité*

$$\mathrm{d}_v(\omega, t_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_v)) \geq \frac{1}{c_{15} \deg \mathcal{A}}$$

est vérifiée. De plus, la constante c_{15} ne dépend que de $\dim \mathcal{G}$, ϕ et de la norme $\|.\|_v$.

Le lemme suivant peut s'interpréter comme une légère généralisation de ce résultat, valable pour un vecteur $u \in t_{\mathcal{G}}(\mathbb{C}_v)$ qui n'est pas forcément une période.

LEMME 6.4.2. *Soit S un entier naturel non nul et soit $u \in t_{\mathcal{G}}(\mathbb{C}_v)$ un vecteur tel que le point $\mathrm{p} := \exp(u)$ appartienne à $\mathcal{G}(\overline{K})$. Alors pour tout sous-groupe algébrique strict $\mathcal{A}$ de $\mathcal{G}$ tel que $u \notin t_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_v)$, on a*

$$\mathrm{d}_v(u, t_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_v)) < \frac{1}{c_{15} S \deg(\mathcal{A})} \implies \forall s \in \{1, \dots, S\},\ s\mathrm{p} \notin \mathcal{A}(\overline{K}).$$

Démonstration : Raisonnons par contraposée et supposons qu'il existe un entier $s \in \{1, \dots, S\}$ tel que $s\mathrm{p} \in \mathcal{A}(\overline{K})$. Alors il existe un vecteur $x \in t_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_v)$ et une période $\omega \in \Omega_{\mathcal{G}}$ tels que $su = x + \omega$. On a donc

$$\mathrm{d}_v(u, t_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_v)) \geq \frac{\mathrm{d}_v(su, t_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_v))}{S} = \frac{\mathrm{d}_v(\omega, t_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_v))}{S}.$$

Puisque $u \notin t_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_v)$ et que $x \in t_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_v)$, on a que $\omega \notin t_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_v)$. D'après la proposition 6.4.1, on a donc

$$\mathrm{d}_v(u, t_{\mathcal{A}}(\mathbb{C}_v)) \geq \frac{1}{c_{15} S \deg(\mathcal{A})},$$

ce qui démontre le lemme.

□

Nous énonçons maintenant une série de conséquences du lemme 6.4.2 et des résultats des paragraphes précédents.

LEMME 6.4.3. *Il existe une constante* $c_{16} \geq 1$ *ne dépendant que de* $\dim \mathcal{G}$, ϕ, $\|.\|_v$, *vérifiant la propriété suivante. Soit* $\mathcal{H}$ *un sous-groupe algébrique strict et connexe de* $\mathcal{G}$ *et soit* $u \in t_{\mathcal{G}}(\mathbb{C}_v)$ *un vecteur tel que le point* $\mathrm{p} := \exp(u)$ *appartienne à* $\mathcal{G}(\overline{K})$. *Soit* S *un entier naturel non nul.*

(1) Supposons que pour tout sous-groupe algébrique strict et connexe $\mathcal{G}'$ *de* $\mathcal{G}$ *tel que* $t_{\mathcal{G}'} + t_{\mathcal{H}} \neq t_{\mathcal{G}}$, *on ait* $u \notin t_{\mathcal{G}'}(\mathbb{C}_v)$. *Alors pour tout sous-groupe algébrique strict et connexe* $\mathcal{G}'$ *de* $\mathcal{G}$ *tel que* $t_{\mathcal{G}'} + t_{\mathcal{H}} \neq t_{\mathcal{G}}$, *on a l'implication*

$$\mathrm{d}_v(u, t_{\mathcal{H}}(\mathbb{C}_v)) < \frac{1}{c_{16} S \deg(\mathcal{G}') \deg(\mathcal{H})} \implies \forall s \in \{1, \dots, S\},\ s\mathrm{p} \notin \mathcal{G}'(\overline{K}).$$

(2) Pour tout sous-groupe algébrique strict et connexe $\mathcal{G}'$ *tel que* $t_{\mathcal{H}} \subseteq t_{\mathcal{G}'}$ *et* $u \notin t_{\mathcal{G}'}(\mathbb{C}_v)$, *on a l'implication*

$$\mathrm{d}_v(u, t_{\mathcal{H}}(\mathbb{C}_v)) < \frac{1}{c_{16} S \deg(\mathcal{G}')} \implies \forall s \in \{1, \dots, S\},\ s\mathrm{p} \notin \mathcal{G}'(\overline{K}).$$

(3) Supposons que $u \notin t_{\mathcal{H}} \otimes \mathbb{C}_v$. *Si*

$$\mathrm{d}_v(u, t_{\mathcal{H}}(\mathbb{C}_v)) < \frac{1}{c_{16} S \deg(\mathcal{H})},$$

alors pour tout sous-groupe algébrique strict et connexe $\mathcal{G}'$ *de* $\mathcal{G}$ *tel que* $t_{\mathcal{G}'} \subseteq t_{\mathcal{H}}$, *on a*

$$\forall s \in \{1, \dots, S\},\ s\mathrm{p} \notin \mathcal{G}'(\overline{K}).$$

(4) Supposons que le K*-espace vectoriel* $t_{\mathcal{G}}$ *est muni d'une structure de fibré adélique hermitien. Alors il existe une constante* $c_{17} \geq 1$ *ne dépendant que de ce choix, de* ϕ *et de* $\dim \mathcal{G}$ *telle que les points 1 et 3 restent vrais si le terme* $c_{16} \deg(\mathcal{H})$ *est remplacé par*

$$\exp(c_{17} \max\{1, h(t_{\mathcal{H}})\}),$$

et le second point reste vrai en remplaçant $c_{16} \deg(\mathcal{G}')$ *par* $\exp(c_{17} \max\{1, h(t_{\mathcal{G}'})\})$.

Démonstration : Montrons le premier point. Soit $\mathcal{G}'$ un sous-groupe algébrique connexe et strict de $\mathcal{G}$ tel que $t_{\mathcal{G}'} + t_{\mathcal{H}} \neq t_{\mathcal{G}}$. Le groupe $\mathcal{G}' + \mathcal{H} = m(\mathcal{G}' \times_K \mathcal{H})$ (où m désigne la loi de $\mathcal{G}$) vérifie $t_{\mathcal{G}'+\mathcal{H}} = t_{\mathcal{G}'} + t_{\mathcal{H}}$ d'après le lemme 6.2.1. On en déduit que $t_{\mathcal{G}'+\mathcal{H}} = t_{\mathcal{G}'} + t_{\mathcal{H}} \neq t_{\mathcal{G}}$. Par hypothèse, $u \notin t_{\mathcal{G}'+\mathcal{H}}(\mathbb{C}_v)$. Par inclusion de $t_{\mathcal{H}}(\mathbb{C}_v)$ dans $t_{\mathcal{G}'+\mathcal{H}}(\mathbb{C}_v) = t_{\mathcal{G}'}(\mathbb{C}_v) + t_{\mathcal{H}}(\mathbb{C}_v)$, on a par ailleurs $\mathrm{d}_v(u, t_{\mathcal{G}'+\mathcal{H}}(\mathbb{C}_v)) \leq \mathrm{d}_v(u, t_{\mathcal{H}}(\mathbb{C}_v))$. D'après le lemme 6.2.2, on a

$$\mathrm{d}_v(u, t_{\mathcal{G}'+\mathcal{H}}(\mathbb{C}_v)) \leq \mathrm{d}_v(u, t_{\mathcal{H}}(\mathbb{C}_v)) < \frac{1}{c_{16} S \deg(\mathcal{G}') \deg(\mathcal{H})} < \frac{1}{c_{15} S \deg(\mathcal{G}' + \mathcal{H})}$$

pourvu que la constante c_{16} soit suffisamment grande. En appliquant le lemme 6.4.2 à $\mathcal{A} = \mathcal{G}' + \mathcal{H}$, on en déduit que $s\mathrm{p} \notin (\mathcal{G}' + \mathcal{H})(\overline{K})$ pour tout $s \in \{1, \dots, S\}$, donc $s\mathrm{p} \notin \mathcal{G}'(\overline{K}) \subset (\mathcal{G}' + \mathcal{H})(\overline{K})$.

Le deuxième point est une conséquence immédiate du lemme 6.4.2 (appliqué à $\mathcal{A} = \mathcal{G}'$) une fois que l'on a remarqué que pour tout sous-groupe algébrique strict et connexe $\mathcal{G}'$ tel que $t_{\mathcal{H}} \subseteq t_{\mathcal{G}'}$, on a $\mathrm{d}_v(u, t_{\mathcal{G}'}(\mathbb{C}_v)) \leq \mathrm{d}_v(u, t_{\mathcal{H}}(\mathbb{C}_v))$. Pour le troisième point, il suffit de remarquer que si $t_{\mathcal{G}'} \subseteq t_{\mathcal{H}}$, alors $\mathcal{G}'(\overline{K}) \subset \mathcal{H}(\overline{K})$ et d'appliquer le lemme 6.4.2. Le dernier point est une conséquence immédiate de la proposition 6.3.4.

□

Chapitre 7

Mesure d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif dans le cas rationnel

7.1. Données générales

Soit n un entier strictement positif et soit K un corps de nombres. On considère des groupes algébriques connexes commutatifs $G_1, \ldots, G_n$ définis sur K et on pose $G = G_1 \times \cdots \times G_n$. La loi d'addition de ces groupes sera notée $+$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on note $g_i = \dim G_i$.

Plongements projectifs et exponentielle. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On considère un plongement $\phi_i \colon G_i \hookrightarrow \mathbb{P}_K^{N_i}$ du type de ceux construits par Serre dans [**78**, Appendice II]. Quitte à effectuer un changement de coordonnées, on peut supposer que ϕ_i envoie l'élément neutre de G_i sur $(1 : 0 : \cdots : 0)$. Nous noterons ϕ le plongement produit :

$$\phi := \phi_1 \times \cdots \times \phi_n \colon G = G_1 \times \cdots \times G_n \hookrightarrow \mathbb{P}_K^{N_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_K^{N_n}.$$

Application exponentielle. Soit v une place quelconque de K et soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On dispose d'une application exponentielle $\exp_{v,i}$ du groupe de Lie v-adique $G_i(\mathbb{C}_v)$, définie sur un voisinage ouvert de l'origine dans $t_{G_i}(\mathbb{C}_v) = t_{G_i} \otimes_K \mathbb{C}_v$. Si la place v est archimédienne, cette application se prolonge en une fonction $\mathbb{C}_v$-analytique sur tout $t_{G_i}(\mathbb{C}_v)$, et définit une application surjective $\exp_{v,i} : t_{G_i}(\mathbb{C}_v) \to G_i(\mathbb{C}_v)$. Lorsque la place v est ultramétrique, il existe un voisinage ouvert $\mathscr{U}_{v,i}$ de l'origine dans $t_{G_i}(\mathbb{C}_v)$ tel que la restriction de $\exp_{v,i}$ à $\mathscr{U}_{v,i}$ réalise un difféomorphisme sur son image. Afin d'uniformiser les notations, nous noterons $\mathscr{U}_{v,i} = t_{G_i}(\mathbb{C}_v)$ si v est archimédienne [1]. Par abus de notation, on confondra souvent $\exp_{v,i}$ avec la composée $\phi_i \circ \exp_{v,i}$.

Composantes de l'exponentielle. Soit v une place quelconque de K et soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Il existe des fonctions $\varphi_{v,i,0}, \ldots, \varphi_{v,i,N_i}$, analytiques de $\mathscr{U}_{v,i} \subseteq t_{G_i}(\mathbb{C}_v)$ dans $\mathbb{C}_v$, et vérifiant :

- $(\varphi_{v,i,0}(0), \ldots, \varphi_{v,i,N_i}(0)) = (1 : 0 : \cdots : 0)$;
- les fonctions $\varphi_{v,i,j}$, $0 \leq j \leq N_i$, sont sans zéro commun sur $\mathscr{U}_{v,i}$;
- pour tout $z \in \mathscr{U}_{v,i}$,

$$\exp_{v,i}(z) = (\varphi_{v,i,0}(z) : \cdots : \varphi_{v,i,N_i}(z)).$$

Nous noterons

$$\Psi_{v,i} \colon z \in \mathscr{U}_{v,i} \mapsto (\varphi_{v,i,0}(z), \cdots, \varphi_{v,i,N_i}(z)) \in \mathbb{C}_v^{N_i+1},$$

et pour $j \in \{0, \ldots, N_i\}$,

$$\Theta_{v,i,j} \colon z \in \mathscr{U}_{v,i} \setminus \varphi_{v,i,j}^{-1}(\{0\}) \mapsto \left(\frac{\varphi_{v,i,0}}{\varphi_{v,i,j}}(z), \ldots, \frac{\varphi_{v,i,N_i}}{\varphi_{v,i,j}}(z) \right) \in \mathbb{C}_v^{N_i+1}.$$

Enfin, posons $\mathscr{U}_v := \mathscr{U}_{v,1} \times \cdots \times \mathscr{U}_{v,n}$,

$$\Psi_v = \Psi_{v,1} \times \cdots \times \Psi_{v,n} \colon \mathscr{U}_v \to \mathbb{C}_v^{N_1+1} \times \cdots \times \mathbb{C}_v^{N_n+1},$$

et

$$\exp_v = \exp_{v,1} \times \cdots \times \exp_{v,n} \colon \mathscr{U}_v \to G_1(\mathbb{C}_v) \times \cdots \times G_n(\mathbb{C}_v).$$

1. Dans ce cas l'exponentielle ne réalise pas forcément un difféomorphisme de $\mathscr{U}_i$ sur son image, contrairement au cas ultramétrique.

On confondra souvent $\exp_v$ avec la composée $\phi \circ \exp_v$. D'après la propriété 4.6 de [**79**], les anneaux

$$K[(\varphi_{v,i,j}/\varphi_{v,i,k})_{0\leq j\leq N_i}], \quad 0 \leq k \leq N_i,$$

sont stables par dérivation selon un vecteur du K-espace vectoriel t_{G_i} pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et pour toute place v de K. Cette propriété nous sera utile au paragraphe 7.3.7.

Choix d'une structure de fibré adélique. D'après [**35**, page 224], il existe un entier $\widetilde{m} \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et des modèles lisses $\mathcal{G}_i \to \operatorname{Spec} \mathscr{O}_K[\frac{1}{\widetilde{m}}]$ de G_i pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, avec $\mathscr{O}_K[\frac{1}{\widetilde{m}}]$ principal (voir aussi [**32**, lemme I.5.1]). On note $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \cdots \times \mathcal{G}_n$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t_{\mathcal{G}_i}$ est un module projectif de type fini sur l'anneau principal $\mathscr{O}_K[\frac{1}{\widetilde{m}}]$, donc il est libre de dimension g_i.

Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. On se donne une structure de fibré adélique hermitien sur t_{G_i}, que l'on note $(t_{G_i}, (\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K})$. On suppose que pour toute place ultramétrique v de K ne divisant pas $\widetilde{m}$, la norme $\|.\|_v$ satisfait la condition suivante : il existe une base $(e_{v,1}, \ldots, e_{v,g_i})$ du $\mathscr{O}_K\left[\frac{1}{\widetilde{m}}\right]$-module libre $t_{\mathcal{G}_i}$ telle que pour tout $(z_1, \ldots, z_{g_i}) \in \mathbb{C}_v^{g_i}$, on ait

$$\|z_1 e_{v,1} + \cdots + z_{g_i} e_{v,g_i}\|_v = \max_{1\leq j\leq g_i} |z_j|_v.$$

Pour toute place $v \nmid \widetilde{m}$, nous pouvons considérer le $\mathscr{O}_{K_v}$-module $t_{\mathcal{G}_i} \otimes \mathscr{O}_{K_v}$, et notre choix de normes assure que $t_{\mathcal{G}_i} \otimes \mathscr{O}_{K_v} = \{z \in t_{G_i}(K_v) \mid \|z\|_v \leq 1\}$. Cette propriété nous sera utile au paragraphe 7.3.7.1. Ce choix fournit une structure de fibré adélique hermitien sur $t_G = t_{G_1} \oplus \cdots \oplus t_{G_n}$, que l'on note aussi $(t_G, (\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K})$.

Dans la suite, on fixe une place $v_0 \in \Sigma_K$. Si v_0 est une place ultramétrique au dessus d'un nombre premier p_0, nous supposerons de plus que la norme $\|.\|_{v_0}$ est définie de la façon suivante. Quitte à agrandir l'entier $\widetilde{m}$, il existe une base $\mathbf{f}_i = (f_{i,1}, \ldots, f_{i,g_i})$ de $t_{\mathcal{G}_i}$ telle que le polydisque

$$D_i(0, r_{p_0}) := \{z_1 f_{i,1} + \ldots + z_{g_i} f_{i,g_i} \in t_{G_i}(\mathbb{C}_{v_0}) \mid \max_{1\leq j\leq g_i} |z_j|_{v_0} < r_{p_0}\}$$

soit inclus dans $\mathscr{U}_{v_0,i}$, où $r_{p_0} = |p_0|_{v_0}^{1/(p_0-1)} = p_0^{-1/(p_0-1)}$. De plus, l'exponentielle $\exp_{v_0,i}$ admet un développement en série entière à coefficients dans $\mathscr{O}_{K_{v_0}}$ au voisinage de 0, et son domaine de convergence strict contient le polydisque $D_i(0, r_{p_0})$. Pour tout $j \in \{0, \ldots, N_i\}$, la fonction $\varphi_{v_0,i,j}$ vérifie : il existe une suite $(a_{v_0,j,\mathbf{n}})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^{g_i}}$ dans $\mathscr{O}_{K_{v_0}}$ telle que pour tout $z = z_1 f_{i,1} + \ldots + z_{g_i} f_{i,g_i} \in D_i(0, r_{p_0})$, on ait

$$\varphi_{v_0,i,j}(z) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^{g_i}} \frac{a_{v_0,j,\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!} \mathbf{z}^{\mathbf{n}}, \quad \text{où } \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_{g_i}).$$

Pour plus de détails sur cette construction, on pourra se référer à la page 224 de l'article [**35**]. Par concaténation des bases $\mathbf{f}_i$ des K-espaces vectoriels t_{G_i}, on construit une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_g)$ de t_G. On définit alors $\|.\|_{v_0}$ comme étant l'unique norme sur $t_G(\mathbb{C}_{v_0})$ rendant la base $\mathbf{e}$ orthonormée. On note

$$D(0, r_{p_0}) := \{z_1 e_1 + \ldots + z_g e_g \in t_G(\mathbb{C}_{v_0}) \mid \max_{1\leq j\leq g} |z_j|_{v_0} < r_{p_0}\}.$$

Convention sur les constantes. Dans toute la suite, on appellera constante un nombre réel ne dépendant que de G, ϕ, v_0, et de la famille de normes $(\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K}$. Dans ce texte, une constante est donc en particulier indépendante du degré du corps K, de V, de $\mathbf{p}$ et de u.

Compléments sur l'exponentielle.

Plongement et loi d'addition. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit $x \in \mathscr{U}_{v_0,i} \subset t_{G_i}(\mathbb{C}_{v_0})$. D'après [**79**, Propriété 4.4] (voir aussi [**35**, page 229]), il existe une constante $c_{18} \geq 1$ et une famille de polynômes $(A_{x,j}^{(i)}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))_{0\leq j\leq N_i}$ de l'anneau

$$K[X_0, \ldots, X_{N_i}, Y_0, \ldots, Y_{N_i}]$$

telle que :

- chacun des $A^{(i)}_{x,j}(\mathbf{X},\mathbf{Y}), 0 \leq j \leq N_i$, est homogène de même degré, inférieur à c_{18}, en chacune des variables $\mathbf{X} = (X_0,\dots,X_{N_i})$ et $\mathbf{Y} = (Y_0,\dots,Y_{N_i})$;
- pour tout $z \in \mathscr{U}_{v_0,i}$ au voisinage de x, on a l'égalité
$$\exp_{v_0,i}(x+z) = (A^{(i)}_{x,0}(\Psi_{v_0,i}(x),\Psi_{v_0,i}(z)) : \cdots : A^{(i)}_{x,N_i}(\Psi_{v_0,i}(x),\Psi_{v_0,i}(z))).$$

De plus, cette constante c_{18} peut être choisie uniforme en l'indice i ainsi qu'en x par quasi-compacité des groupes G_i. Elle ne dépend que de g et du plongement ϕ. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on note
$$A^{(i)}_x(\mathbf{X},\mathbf{Y}) := (A^{(i)}_{x,0}(\mathbf{X},\mathbf{Y}) : \cdots : A^{(i)}_{x,N_i}(\mathbf{X},\mathbf{Y})).$$
Afin d'alléger les notations, nous omettrons souvent la référence à x dans cette notation, en écrivant $A^{(i)}_j$ au lieu de $A^{(i)}_{x,j}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Ordre analytique de l'exponentielle. Si v_0 est archimédienne, alors les fonctions $\varphi_{v_0,i,j}$, $0 \leq j \leq N_i$, sont d'ordre analytique inférieur à ρ_i, où $\rho_i = 1$ si G_i est linéaire et $\rho_i = 2$ sinon. De plus, d'après [**79**, page 75], il existe une constante $c_{19} \geq 1$ telle que pour tout entier $i \in \{1,\dots,n\}$ et tout vecteur $z \in t_{G_i}(\mathbb{C}_{v_0})$, on ait
$$-c_{19}(1+\|z\|_{v_0})^{\rho_i} \leq \log \max_{0\leq j\leq N_i} |\varphi_{v_0,i,j}(z)|_{v_0} \leq c_{19}(1+\|z\|_{v_0})^{\rho_i}.$$
Cette constante ne dépend que de ϕ, $\|.\|_{v_0}$, g.

Données du problème. Dans la suite, on fixe un vecteur $u = (u_1,\dots,u_n) \in \mathscr{U}_{v_0} = \mathscr{U}_{v_0,1} \times \cdots \times \mathscr{U}_{v_0,n}$. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, on note $\mathbf{p}_i = \exp_{v_0,i}(u_i)$ et on suppose que $\mathbf{p}_i \in G_i(K)$. On pose $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_n) \in G(K)$. Si v_0 est ultramétrique, on suppose de plus que $u \in D(0,r_{p_0})$. Nous notons $d(.,.)$ la distance associée à la norme $\|.\|_{v_0}$ sur $t_G(\mathbb{C}_{v_0})$. On fixe un sous-espace vectoriel V de t_G de codimension $1 \leq t \leq g$, et on suppose que $V = t_H$ est l'algèbre de Lie d'un sous-groupe algébrique connexe H de G. Dans la suite, nous cherchons à minorer la distance $d(u, V \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}) = \inf\{\|u-x\|_{v_0} \mid x \in V \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}\}$. Pour simplifier, nous noterons cette distance $d(u,V)$.

7.2. Résultats

Dans toute la suite, on note $D = [K:\mathbb{Q}]/[K_{v_0}:\mathbb{Q}_{v_0}]$. Nous allons obtenir des minorations légèrement différentes selon que le groupe G est une variété semi-abélienne ou non.

7.2.1. Cas général. Dans le cas où la place v_0 est archimédienne, nous obtenons le résultat général suivant.

THÉORÈME 7.2.1. *Il existe une constante $c_{20} \geq 1$ ayant la propriété suivante. Supposons que la place v_0 est archimédienne. Soit $\mathfrak{e}$ un nombre réel supérieur à e et soit $\mathfrak{A} \geq 1$ un nombre réel tel que*
$$\mathfrak{A} \geq \frac{\max\{D, Dh(V), \log\|u\|_{v_0}\}}{\log \mathfrak{e}}.$$
Posons
$$U_0 := (\mathfrak{A}\log\mathfrak{e})\mathfrak{A}^{1/t} \times \prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{D\max_{k\leq\mathfrak{A}} h(k\mathbf{p}_i) + (\mathfrak{A}\mathfrak{e}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}}{\mathfrak{A}\log\mathfrak{e}}\right)^{g_i/t},$$
où le maximum porte sur les entiers naturels $k \leq \mathfrak{A}$. Supposons que pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G tel que $t_{G'} + V \neq t_G$, on ait $u \notin t_{G'}(\mathbb{C}_{v_0})$. Alors $u \notin V \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ et
$$\log d(u,V) \geq -c_{20}U_0.$$

L'affirmation $u \notin V \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ du théorème est une conséquence triviale de l'hypothèse faite sur u, et l'intérêt du théorème réside dans la minoration de la distance $d(u,V)$. Remarquons que notre résultat améliore la minoration du théorème 1.2 de [**35**], dans laquelle le terme $\mathfrak{A}^{1/t}$ était remplacé par
$$\left(\mathfrak{A} + \frac{D}{\log\mathfrak{e}}\log(e + \frac{D}{\log\mathfrak{e}})\right)^{1/t}.$$

Nous remplaçons également les quantités $\max_{k\le c_{22}\mathfrak{A}} h(k\mathbf{p}_i)$ de [**35**] par $\max_{k\le\mathfrak{A}} h(k\mathbf{p}_i)$. Mais l'amélioration la plus importante réside dans l'hypothèse faite sur le point u. Le théorème 1.2 de [**35**] imposait la condition suivante : pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G tel que $t_{G'}+V\neq t_G$ et pour tout entier naturel k non nul, on a $k\mathbf{p}\notin G'(\overline{K})$. Cette condition rendait par exemple le théorème invalide si le point $\mathbf{p}$ était de torsion. L'hypothèse $t_{G'}+V\neq t_G \implies u\notin t_{G'}(\mathbb{C}_{v_0})$ que nous faisons sur u est bien plus faible et est courante dans les résultats de minorations simultanées de formes linéaires de logarithmes ([**47, 66**]). Quand V est un hyperplan ($t=1$), cette hypothèse correspond simplement à la condition $u\notin V\otimes\mathbb{C}_{v_0}$.

Nous démontrons également un analogue ultramétrique de ce théorème, qui généralise le théorème 1.3 de [**35**]. Rappelons que pour tout nombre réel a, on a noté $\log_+(a)=\log\max\{1,a\}$.

Théorème 7.2.2. *Il existe une constante $c_{21}\geq 1$ ayant la propriété suivante. Supposons que la place v_0 est finie et que $\|u\|_{v_0}<r_{p_0}$. Soit $\mathfrak{R}$ un nombre réel dans l'intervalle $]1,r_{p_0}/\|u\|_{v_0}[$ et soit $\mathfrak{A}\geq 1$ un nombre réel supérieur à*

$$\frac{D\max\{1,h(V)\}+\log_+((\log\mathfrak{R})^{-1})}{\log\mathfrak{R}}.$$

Posons

$$U_1:=(\mathfrak{A}\log\mathfrak{R})\mathfrak{A}^{1/t}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{D\max_{k\le\mathfrak{A}}h(k\mathbf{p}_i)}{\mathfrak{A}\log\mathfrak{R}}\right)^{g_i/t},$$

où le maximum porte sur les entiers naturels $k\leq\mathfrak{A}$. Supposons que pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G tel que $t_{G'}+V\neq t_G$, on ait $u\notin t_{G'}(\mathbb{C}_{v_0})$. Alors $u\notin V\otimes_K\mathbb{C}_{v_0}$ et

$$\log d(u,V)\geq -c_{21}U_1.$$

Dans ce théorème intervient l'hypothèse naturelle que le point u appartient au disque de convergence de l'exponentielle. Ceci améliore le théorème 1.3 de [**35**], qui imposait la condition plus forte $\|u\|_{v_0}<r_{p_0}^2$. Cette nouveauté est due à l'utilisation d'un cas très particulier d'un lemme d'interpolation dû à Robba [**69**] (rappelé au paragraphe 7.3.8.2). Comme dans le cas archimédien, nous remplaçons les quantités

$$\left(\mathfrak{A}+\frac{D}{\log\mathfrak{e}}\log(e+\frac{D}{\log\mathfrak{e}})\right)^{1/t}\quad\text{et}\quad\max_{k\le c_{23}\mathfrak{A}}h(k\mathbf{p}_i)$$

du théorème 1.3 de [**35**] par $\mathfrak{A}^{1/t}$ et $\max_{k\le\mathfrak{A}} h(k\mathbf{p}_i)$ respectivement. Cependant, dans le cas ultramétrique, l'hypothèse $t_{G'}+V\neq t_G \implies u\notin t_{G'}(\mathbb{C}_{v_0})$ est équivalente à celle du théorème 1.3 de [**35**], car l'exponentielle v_0-adique réalise un difféomorphisme de $D(0,r_{p_0})$ sur son image. Ainsi, si k est un entier non nul et s'il existe un sous-groupe G' tel que $k\mathbf{p}\in G'(\overline{K})$, alors on a $u\in t_{G'}(\mathbb{C}_{v_0})$.

7.2.2. Cas semi-abélien. Dans le cas où le groupe G est une variété semi-abélienne, nous obtenons les deux énoncés suivants, qui sont plus précis en terme de la hauteur du sous-espace V. Nous établissons les minorations des théorèmes 1.2 et 1.3 de [**35**] avec des hypothèses plus faibles sur le vecteur u.

Théorème 7.2.3. *Supposons que le groupe G est semi-abélien et que la place v_0 est archimédienne. Il existe une constante $c_{22}\geq 1$ ayant la propriété suivante. Soit $\mathfrak{e}$ un nombre réel supérieur à e et soit $\mathfrak{A}\geq 1$ un nombre réel tel que*

$$\mathfrak{A}\geq\frac{\max\{D,Dh(V),\log\|u\|_{v_0}\}}{\log\mathfrak{e}}.$$

Posons

$$U_2 := (\mathfrak{A}\log\mathfrak{e})\left(1+\frac{D}{\log\mathfrak{e}}\log(\frac{D}{\log\mathfrak{e}})\right)^{1/t} \\ \times\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{D\max_{k\leq\mathfrak{A}}h(k\mathbf{p}_i)+(\mathfrak{A}\mathfrak{e}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}}{\mathfrak{A}\log\mathfrak{e}}\right)^{g_i/t},$$

où le maximum porte sur les entiers naturels $k \leq \mathfrak{A}$. Supposons que pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G tel que $t_{G'} + V \neq t_G$, on ait $u \notin t_{G'}(\mathbb{C}_{v_0})$. Alors $u \notin V \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ et

$$\log d(u, V) \geq -c_{22}U_2.$$

Théorème 7.2.4. *Supposons que le groupe G est semi-abélien, que la place v_0 est finie et que $\|u\|_{v_0} < r_{p_0}$. Il existe une constante $c_{23} \geq 1$ ayant la propriété suivante. Soit $\mathfrak{R}$ un nombre réel dans l'intervalle $]1, r_{p_0}/\|u\|_{v_0}[$ et soit $\mathfrak{A} \geq 1$ un nombre réel supérieur à*

$$\frac{D\max\{1, h(V)\} + \log_+((\log\mathfrak{R})^{-1})}{\log\mathfrak{R}}.$$

Posons

$$U_3 :=(\mathfrak{A}\log\mathfrak{R})\left(1+\frac{D}{\log\mathfrak{R}}\log(\frac{D}{\log\mathfrak{R}})\right)^{1/t}\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{D\max_{k\leq\mathfrak{A}}h(k\mathbf{p}_i)}{\mathfrak{A}\log\mathfrak{R}}\right)^{g_i/t},$$

où le maximum porte sur les entiers naturels $k \leq \mathfrak{A}$. Supposons que pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G tel que $t_{G'} + V \neq t_G$, on ait $u \notin t_{G'}(\mathbb{C}_{v_0})$. Alors $u \notin V \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ et

$$\log d(u, V) \geq -c_{23}U_3.$$

7.2.3. Commentaires sur la démonstration. Le schéma de démonstration que nous proposons est commun aux quatre théorèmes. Comme annoncé dans l'introduction, il combine les outils classiques issus de la méthode de Baker, approfondie par Philippon et Waldschmidt [**66, 67**], avec des outils de la théorie des pentes des fibrés adéliques. En particulier, la section auxiliaire sera construite au moyen du « lemme de Siegel approché absolu » (lemme 1.1.22, chapitre 1.1), à la manière de Gaudron [**38**]. Au lieu de considérer un coefficient de Taylor de cette section et d'appliquer la formule du produit, nous encadrerons la hauteur de l'un de ses jets, ce qui nous affranchira de la dépendance en un choix de base de dérivation. Comme dans l'article [**35**], les estimations aux places ultramétriques reposent sur la notion de taille de sous-schémas formels due à Bost [**8**]. Le lemme 6.4.3 intervient de façon cruciale dans la preuve, en permettant « d'exclure » le cas périodique, comme nous l'avons expliqué dans l'introduction. Nous l'utiliserons lors de la construction d'un sous-groupe obstructeur (lemme 7.3.3), ainsi que dans l'application d'un lemme de multiplicités (§ 7.3.3).

Nous commencerons par démontrer les théorèmes 7.2.3 et 7.2.4. Nous appliquerons la méthode décrite ci-dessus en attachant un facteur $\mathbb{G}_a$ au groupe G : nous travaillerons avec le point $(1, \mathbf{p}) \in (\mathbb{G}_a \times G)(K)$, et nous établirons une minoration de la distance $d((1, u), t_{\mathbb{G}_a} \oplus V) = d(u, V)$. Nous disposerons ainsi d'une variable supplémentaire pour construire la section auxiliaire. L'influence du facteur $\mathbb{G}_a$ se manifeste notamment lors de l'application du lemme de multiplicités (§ 7.3.3), où il permet d'assouplir les contraintes que doivent vérifier les paramètres. Cet artifice nous permettra de préciser la mesure en termes du paramètre $\mathfrak{A}$, et donc en termes de la hauteur $h(V)$. En contrepartie, l'ajout du facteur $\mathbb{G}_a$ introduit un terme résiduel, appelé « poids de la droite affine » (en suivant la terminologie de Gaudron [**35**]), qui sera évalué au paragraphe 7.3.10. C'est ce terme qui fait apparaître les quantités

$$\left(1+\frac{D}{\log\mathfrak{e}}\log(e+\frac{D}{\log\mathfrak{e}})\right)^{1/t} \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{D}{\log\mathfrak{R}}\log(e+\frac{D}{\log\mathfrak{R}})\right)^{1/t}$$

dans les minorations des théorèmes 7.2.3 et 7.2.4.

Dans un second temps, nous démontrerons les théorèmes 7.2.1 et 7.2.2. La preuve est l'exacte analogue de celle du cas semi-abélien, sans l'ajout d'un facteur $\mathbb{G}_a$. Dans le cas général, cette astuce se révèle inutile dans la démonstration. Ainsi, le poids de la droite affine n'intervient pas, et c'est ce qui permet de remplacer le terme $\left(\mathfrak{A}+\frac{D}{\log\mathfrak{e}}\log(e+\frac{D}{\log\mathfrak{e}})\right)^{1/t}$ de [**35**] par $\mathfrak{A}^{1/t}$. Si nous avions proposé une démonstration commune aux quatre théorèmes, cette amélioration aurait été impossible ; par ailleurs, nous aurions été contraint de faire une l'hypothèse plus forte sur le point u dans le cas général, à savoir : pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de $\mathbb{G}_a\times G$ tel que $t_{G'}+t_{\mathbb{G}_a}+V\neq t_{\mathbb{G}_a\times G}$, on a $(1,u)\notin t_{\mathbb{G}_a\times G}(\mathbb{C}_{v_0})$. Afin de limiter les répétitions, nous renverrons régulièrement aux démonstrations du cas semi-abélien dans la preuve du cas général. Nous porterons néanmoins une attention particulière aux étapes qui requièrent des modifications (choix d'un sous-groupe, lemme de multiplicités et choix des paramètres).

Convention sur les notations. À l'exception du paragraphe 7.3.7, nous travaillerons exclusivement avec l'exponentielle v_0-adique $\exp_{v_0}\colon t_G(\mathbb{C}_{v_0})\to G(\mathbb{C}_{v_0})$. Afin de ne pas alourdir les notations, nous ne soulignerons plus la dépendance en la place v_0 dans les notations introduites précédemment, et écrivant plus simplement $\mathscr{U}$, exp, $(\Psi_i)_{1\leq i\leq n}$, etc.

7.3. Démonstration dans le cas semi-abélien

Nous allons commencer par démontrer les théorèmes 7.2.3 et 7.2.4, qui concernent le cas semi-abélien. On désigne par G_0 le groupe additif $\mathbb{G}_a$ (plongé dans $\mathbb{P}^1_K$ par $z\mapsto(1:z)$) et on note W le sous-espace vectoriel (défini sur K) $t_{G_0}\oplus V$ de $t_{G_0\times G}=t_{G_0}\oplus t_G$. On pose $e_0=1\in t_{G_0}=K$. Le K-espace vectoriel $t_{G_0\times G}$ est muni d'une structure de fibré adélique hermitien par somme directe. Par abus de notation, nous notons encore $d(.,.)$ la distance associée à la norme $\|.\|_{v_0}$ sur $t_{G_0\times G}(\mathbb{C}_{v_0})$. Remarquons que l'on a $d(u,V)=d((1,u),W)$. Enfin, on note $\mathbf{q}=(1,\mathbf{p})\in(G_0\times G)(K)$. À partir de maintenant, nous faisons l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE 1. Pour tout sous groupe algébrique connexe G' de G tel que $t_{G'}+V\neq t_G$, on a $u\notin t_{G'}(\mathbb{C}_{v_0})$.

En particulier, le point u n'appartient pas à $V\otimes_K\mathbb{C}_{v_0}$. On suppose que le groupe G est une variété semi-abélienne. L'hypothèse 1 entraîne que pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de $G_0\times G$ tel que $t_{G'}+W\neq t_{G_0\times G}$, on a $(1,u)\notin t_{G'}(\mathbb{C}_{v_0})$. En effet, comme G est semi abélien, tout sous-groupe G' de $G_0\times G$ s'écrit (après une éventuelle extension du corps de base) sous la forme $G'=G'_0\times G''$, où G'_0 est un sous-groupe algébrique de G_0 et G'' est un sous-groupe algébrique de G. Si $(1,u)\in t_{G'}(\mathbb{C}_{v_0})$, alors $u\in t_{G''}(\mathbb{C}_{v_0})$, et d'après l'hypothèse 1, on a

$$t_{G'}+W=t_{G_0}\oplus(t_{G''}+V)=t_{G_0\times G}=t_{G_0}\oplus t_G.$$

7.3.1. Choix d'un sous-groupe. L'objet de ce paragraphe est de choisir un sous-groupe particulier $\widetilde{G}$ de $G_0\times G$, qui jouera un rôle fondamental dans la construction d'une section auxiliaire (voir les paragraphes 7.3.5.1 et 7.3.6). Les définitions qui suivent correspondent à celles de [**35**, § 3.2]. Une nouveauté cruciale pour la suite de la démonstration est le lemme 7.3.3, qui repose sur les résultats du chapitre 6, et qui nous permettra d'exclure le cas dit « périodique », où des multiples de $\mathbf{q}$ appartiennent à $\widetilde{G}$.

Soient $\widetilde{D}_0,\widetilde{D}_1,\dots,\widetilde{D}_n,\widetilde{T},C_0$ des nombres réels strictement positifs et $0<S_0<S$ des entiers. On suppose que $\widetilde{T}>1$ et on pose $T=[\widetilde{T}]$. Dans toute la suite, si G' est un sous-groupe algébrique de $G_0\times G$, on note $\lambda'=\operatorname{codim}_W(t_{G'}\cap W)$ et $r'=\operatorname{codim}_{G_0\times G}(G')$. Posons $\Sigma_{\mathbf{q}}(S)=\{0_{G_0\times G},\mathbf{q},\dots,S\mathbf{q}\}$.

DÉFINITION 7.3.1. Soit G' un sous-groupe algébrique connexe de $G_0\times G$ tel que $t_{G'}+W\neq t_{G_0\times G}$. On définit le réel strictement positif

$$A(G')=\left(\frac{\widetilde{T}^{\lambda'}\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S)+G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right)\mathscr{H}(G';\widetilde{D}_0,\widetilde{D}_1,\dots,\widetilde{D}_n)}{C_0\mathscr{H}(G_0\times G;\widetilde{D}_0,\widetilde{D}_1,\dots,\widetilde{D}_n)}\right)^{\frac{1}{r'-\lambda'}}$$

et on pose $B(G')=A(G')^{\frac{r'-\lambda'}{r'}}\max\{1,A(G')\}^{\frac{\lambda'}{r'}}$.

Comme expliqué à la page 231 de [**35**], la quantité

$$x := \inf\{B(G') \mid t_{G'} + W \neq t_{G_0\times G}\},$$

où G' varie parmi les sous-groupes algébriques connexes G' de $G_0 \times G$ tel que $t_{G'} + W \neq t_{G_0\times G}$, est un nombre réel strictement positif. En effet, si $B(G') \leq B(\{0\})$, alors la quantité $\mathscr{H}(G'; \widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_n)$ est bornée, et par conséquent le degré $\deg G'$ est borné. Puisque les coefficients de $\mathscr{H}(G'; X_0, X_1, \dots, X_n)$ sont des entiers naturels inférieurs à $\deg G'$, on en déduit que $\mathscr{H}(G'; \widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_n)$ appartient à un ensemble fini (à $\widetilde{D}_0, \widetilde{D}_1, \dots, \widetilde{D}_n$ fixés). Par conséquent l'ensemble

$$\{B(G') \mid B(G') \leq B(\{0\}),\ t_{G'} + W \neq t_{G_0\times G}\ \}$$

est fini, d'où

$$x = \min\{B(G') \mid t_{G'} + W \neq t_{G_0\times G}\} > 0.$$

Fixons un sous-groupe $\widetilde{G}$ de $G_0 \times G$ tel que $B(\widetilde{G}) = x$. Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on pose également $D_i^{\#} = x\widetilde{D}_i$, $D_i = [D_i^{\#}]$ et $D_i' = \max\{1, D_i\}$. Le résultat suivant est le lemme 3.3 de [**35**], et découle facilement des définitions précédentes.

LEMME 7.3.2. *Supposons que $x \leq 1$. Alors pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de $G_0 \times G$ tel que $t_{G'} + W \neq t_{G_0\times G}$, l'inégalité suivante est vérifiée :*

(41)
$$\widetilde{T}^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right) \mathscr{H}(G'; D_0^{\#}, D_1^{\#}, \dots, D_n^{\#}) \geq C_0 \mathscr{H}(G_0 \times G; D_0^{\#}, D_1^{\#}, \dots, D_n^{\#}).$$

De plus, cette inégalité est une égalité pour $G' = \widetilde{G}$.

Démonstration : Nous reprenons les arguments de [**35**]. Posons

$$\mho_{G'} = \frac{\widetilde{T}^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right) \mathscr{H}(G'; D_0^{\#}, D_1^{\#}, \dots, D_n^{\#})}{C_0 \mathscr{H}(G_0 \times G; D_0^{\#}, D_1^{\#}, \dots, D_n^{\#})}.$$

Par homogénéité de $\mathscr{H}$, on a $x^{r'} \mho_{G'} = A(G')^{r'-\lambda'}$. Si $A(G') \geq 1$, alors $\mho_{G'} \geq 1/x^{r'} \geq 1$. Si $A(G') < 1$, alors par définition on a $B(G') = A(G')^{\frac{r'-\lambda'}{r'}} \geq x$, puis $\mho_{G'} \geq 1$. On a donc démontré l'inégalité (41). De plus comme $x \leq 1$ on a $x = A(\widetilde{G})^{\frac{\widetilde{r}-\widetilde{\lambda}}{\widetilde{r}}}$, d'où $\mho_{\widetilde{G}} = 1$ (où $\widetilde{\lambda} = \operatorname{codim}_W(t_{\widetilde{G}} \cap W)$ et $\widetilde{r} = \operatorname{codim}_{G_0\times G}(\widetilde{G})$).

□

Le résultat suivant est une conséquence du lemme 6.4.3 et du lemme 7.3.2.

LEMME 7.3.3. *Si la place v_0 est finie, alors*

$$\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right) = S + 1.$$

Supposons que $x \leq 1$ et que la place v_0 est archimédienne. Il existe une constante $c_{24} \geq 1$ telle que si

$$d(u, V) < \frac{1}{C_0 c_{24} S D_0' (D_1')^{g_1} \cdots (D_n')^{g_n} \deg(H)},$$

alors il n'existe pas d'entier $s \in \{1, \dots, S\}$ tel que $s\mathbf{q} \in \widetilde{G}(\overline{K})$. En particulier

$$\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right) = S + 1.$$

De plus, la constante c_{24} est de la forme $c_{25} \times \deg G$, où c_{25} ne dépend que de g, ϕ, $\|.\|_{v_0}$.

Démonstration : Si la place v_0 est finie, l'exponentielle exp réalise un difféomorphisme de $D(0, r_{p_0})$ sur son image. S'il existe $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $s\mathbf{q} \in \widetilde{G}(\overline{K})$, on en déduit que $(1, u) \in t_{\widetilde{G}}(\mathbb{C}_{v_0})$, ce qui est absurde d'après l'hypothèse 1 (par construction, on a $t_{\widetilde{G}} + W \neq t_{G_0 \times G}$). Supposons que la place v_0 est archimédienne. Nous allons appliquer le lemme 6.4.3 à $\mathcal{G} = G_0 \times G$, $\mathcal{H} = G_0 \times H$ et au point $(1, u) \in t_{G_0 \times G}$ (remarquons que $d(u, V) = d((1, u), W)$). L'hypothèse 1 correspond alors à celle du lemme 6.4.3 (1). Par définition de $\widetilde{G}$, on a $t_{\widetilde{G}} + W \neq t_{G_0 \times G}$. De plus, d'après le lemme 7.3.2, on a

$$\widetilde{T}^{\widetilde{\lambda}} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right) \mathscr{H}(\widetilde{G}; D_0^{\#}, D_1^{\#}, \ldots, D_n^{\#}) = C_0 \mathscr{H}(G_0 \times G; D_0^{\#}, D_1^{\#}, \ldots, D_n^{\#}).$$

D'après [**46**, propriété 4.4], pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, l'application partielle

$$x_i \mapsto \mathscr{H}(G_0 \times G; x_0, \ldots, x_n) / \mathscr{H}(\widetilde{G}; x_0, \ldots, x_n)$$

est croissante. Comme $D_i^{\#} \leq 2D_i'$, on en déduit que

$$\widetilde{T}^{\widetilde{\lambda}} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right) \mathscr{H}(\widetilde{G}; D_0', D_1', \ldots, D_n') \leq C_0 2^{g+1} \mathscr{H}(G_0 \times G; D_0', D_1', \ldots, D_n').$$

Comme $1 \leq D_i'$ pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, on a par ailleurs

$$\deg(\widetilde{G}) = \mathscr{H}(\widetilde{G}; 1, \ldots, 1) \leq \mathscr{H}(\widetilde{G}; D_0', D_1', \ldots, D_n'),$$

et donc

$$\begin{aligned} \deg(\widetilde{G}) &\leq C_0 2^{g+1} \mathscr{H}(G_0 \times G; D_0', D_1', \ldots, D_n') \\ &= C_0 2^{g+1} (g+1) \deg(G) D_0' (D_1')^{g_1} \cdots (D_n')^{g_n}. \end{aligned}$$

On conclut alors avec le lemme 6.4.3 (1).

□

7.3.2. Fibré adélique hermitien des sections auxiliaires. Soit $(P_{\lambda_0})_{0 \leq \lambda_0 \leq D_0}$ une base de l'espace vectoriel $K[X]_{\leq D_0}$ des polynômes de degré inférieur ou égal à D_0 avec $P_0 = 1$. Notons $N_0 = 1$ et $\mathbb{P} = \mathbb{P}_K^{N_0} \times \cdots \times \mathbb{P}_K^{N_n}$. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on fixe des coordonnées homogènes $(X_{i,j})_{0 \leq j \leq N_i}$ de $\mathbb{P}_K^{N_i}$. Notons également $\mathbf{D} = (D_0, \ldots, D_n)$ et $K[\mathbb{P}]$ la K-algèbre multigraduée des polynômes multihomogènes en les variables $(X_{i,j})_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq N_i}$. Soit E l'espace des polynômes de multidegré $\mathbf{D}$ qui ne s'annulent pas identiquement sur $G_0 \times G$; en notant $I_{G_0 \times G}$ l'idéal annulateur de $G_0 \times G$ dans $\mathbb{P}$, on a ainsi $E = (K[\mathbb{P}]/I_{G_0 \times G})_{\mathbf{D}}$. Considérons l'ensemble

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, (\boldsymbol{\lambda}_i)_{1 \leq i \leq n}) \in \mathbb{N} \times \prod_{i=1}^{n} \mathbb{N}^{N_i + 1} \mid \lambda_0 \leq D_0,\ \boldsymbol{\lambda}_i = (\lambda_{i,j})_{0 \leq j \leq N_i},\ |\boldsymbol{\lambda}_i| = D_i\}.$$

L'ensemble des classes de polynômes de la forme

$$X_{0,0}^{\deg P_{\lambda_0}} P_{\lambda_0}\left(\frac{X_{0,1}}{X_{0,0}}\right) \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{N_i} X_{i,j}^{\lambda_{i,j}}, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$$

est une famille génératrice de E. Considérons une famille de tels polynômes dont les classes $s_1, \ldots, s_{\dim E}$ forment une base de E. On définit un fibré adélique hermitien $(E, (\|.\|_{E,v})_{v \in K})$ en choisissant pour chaque place $v \in \Sigma_K$ la norme $\|.\|_{E,v}$ rendant cette base orthonormée. On a ainsi $\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(E) = 0$. Concrètement, un élément s de E s'écrit comme la classe d'équivalence d'un polynôme

$$P = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} X_{0,0}^{\deg P_{\lambda_0}} P_{\lambda_0}\left(\frac{X_{0,1}}{X_{0,0}}\right) \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{N_i} X_{i,j}^{\lambda_{i,j}}. \tag{42}$$

On note alors

$$F_s = P \circ (\Psi_0 \times \Psi) \colon \mathbb{C}_{v_0} \times \mathscr{U} \to \mathbb{C}_{v_0},$$

avec $\Psi_0(z) = (1, z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}_{v_0}$. Cette application est bien définie car elle ne dépend pas du choix d'un polynôme P représentant s. Pour toute section $s \in E$, il existe donc une unique famille $(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda}$ d'éléments de K telle que pour tout $\mathbf{z} = (z_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n) \in \mathbb{C}_{v_0} \times \mathscr{U}$, on ait

$$F_s(\mathbf{z}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} P_{\lambda_0}(z_0) \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{N_i} \varphi_{i,j}(\mathbf{z}_i)^{\lambda_{i,j}}.$$

Avec ces notations, pour toute place v de K, la norme $\|.\|_{E,v}$ satisfait

$$\|s\|_{E,v} = |(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda}|_{2,v} = \begin{cases} (\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} |p_{\boldsymbol{\lambda}}|_v^2)^{1/2} & \text{si } v \text{ est archimédienne,} \\ \max_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} |p_{\boldsymbol{\lambda}}|_v & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons maintenant définir une norme particulière en la place v_0. Rappelons que S_0 et $T = [\widetilde{T}]$ sont des entiers strictement positifs. On considère l'ensemble

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \{(m, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{g+1-t} \mid m \leq S_0,\ |\boldsymbol{\tau}| \leq 2(g+1)T\}.$$

Soit $(w_1, \ldots, w_{g-t})$ une base de $V \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ formée de vecteurs de norme égale à 1. On considère alors la base de $W \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ donnée par $\mathbf{w} = (e_0, w_1, \ldots, w_{g-t})$. Considérons la matrice $\mathcal{A}_0$ de taille $\operatorname{card}\boldsymbol{\Upsilon} \times \dim E$ définie par : pour tout $(m, \boldsymbol{\tau}) \in \boldsymbol{\Upsilon}$, pour tout $i \in \{1, \ldots, \dim E\}$,

$$\mathcal{A}_0[(m, \boldsymbol{\tau}), i] = \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} D_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_{s_i}(m, mu).$$

Étant donné un nombre $\alpha \in |K_{v_0}^{\times}|_{v_0}$ et une place v de K, on définit une norme $\|.\|_{\alpha,v}$ sur $E \otimes_K \mathbb{C}_v$ en posant $\|.\|_{\alpha,v} = \|.\|_{E,v}$ si $v \neq v_0$ et

$$\|s\|_{\alpha,v_0} = \begin{cases} \max\{\|s\|_{E,v_0}, \alpha|\mathcal{A}_0 s|_{2,v_0}\} & \text{si } v_0 \text{ est finie,} \\ (\|s\|_{E,v_0}^2 + (\alpha|\mathcal{A}_0 s|_{2,v_0})^2)^{1/2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que pour toute place $v \in \Sigma_K$, on a l'inégalité $\|.\|_{E,v} \leq \|.\|_{\alpha,v}$. On note h_α la hauteur (logarithmique et absolue) sur $E \otimes_K \overline{K}$ associée à la famille de normes $(\|.\|_{\alpha,v})_{v\in\Sigma_K}$: si K' est une extension finie de K et si $s \in E \otimes_K K' \setminus \{0\}$, on a

$$h_\alpha(s) = \sum_{v\in\Sigma_{K'}} \frac{[K'_v : \mathbb{Q}_v]}{[K' : \mathbb{Q}]} \log \|s\|_{\alpha,v}.$$

7.3.3. Lemme de multiplicités. L'objet de ce paragraphe est de démontrer le résultat suivant, qui repose sur un lemme de multiplicités dû à Philippon [**64, 65**].

Lemme 7.3.4. *Supposons que $x \leq 1$. Il existe une constante $c_{26} \geq 1$ vérifiant la propriété suivante. Si les conditions*

(a) $(c_{26} S D'_0 (D'_1)^{g_1} \cdots (D'_n)^{g_n})^{-1} > d(u, V)$ *;*

(b) $\min\{T, S\} > C_0 > c_{26}$ *;*

(c) $T > c_{26} \max\{D'_0/(S+1), D'_1, \ldots, D'_n\}$

sont vérifiées, alors il n'existe pas d'élément $s \in E \otimes_K \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ telle que

$$\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu) = 0 \quad \forall (m, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{g+1-t},\ m \leq (g+1)S,\ |\boldsymbol{\tau}| \leq (g+1)T. \tag{43}$$

De plus $c_{26} = c_{27} \times (\deg G)^2$, où $c_{27} \geq 1$ ne dépend que de g, ϕ, $\|.\|_{v_0}$.

Démonstration : Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une solution $s \in E \otimes_K \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ au système d'égalités (43). D'après le lemme de multiplicités de Philippon [**65**], il existe un sous-groupe algébrique connexe et strict G' de $G_0 \times G$ tel que

(44)
$$T^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right) \mathscr{H}(G'; D'_0, D'_1, \ldots, D'_n) \leq 2^{g+1} \mathscr{H}(G_0 \times G; D'_0, D'_1, \ldots, D'_n).$$

Étape 1 : Montrons que $t_{G'} + W \neq t_{G_0\times G}$. Par l'absurde, si $t_{G'} + W = t_{G_0\times G}$ alors $\lambda' = r' = \operatorname{codim}_{G_0\times G} G'$. Comme G est une variété semi-abélienne, le groupe G' s'écrit

$G' = G_0' \times A$, où G_0' est un sous-groupe de G_0 et A est un sous-groupe de G. Si G_0' est égal à G_0, alors l'inégalité (44) entraîne

$$T^{r'} \leq 2^{g+1} \deg(G_0 \times G) \max\{D_1', \ldots, D_n'\}^{r'}.$$

Si $G_0' = \{0\}$, alors pour tout entier $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a $m\mathbf{q} = (m, m\mathbf{p}) \notin G' = \{0\} \times A$, donc

$$\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right) = S + 1.$$

D'après (44), on a alors

$$T^{r'} \leq 2^{g+1} \deg(G_0 \times G) \frac{D_0'}{S+1} \max\{D_1', \ldots, D_n'\}^{r'-1}.$$

Dans tous les cas, l'hypothèse (c) du lemme est contredite pourvu que la constante c_{27} soit choisie suffisamment grande. On a donc bien $t_{G'} + W \neq t_{G_0 \times G}$.

Étape 2 : Montrons que $\lambda' \geq 1$ ou $\{\forall m \in \{1, \ldots, S\},\ m\mathbf{q} \notin G'(K)\}$. D'après la première étape, $t_{G'} + W \neq t_{G_0 \times G}$, donc d'après l'hypothèse 1 on a $(1, u) \notin t_{G'}(\mathbb{C}_{v_0})$. Si $\lambda' = \operatorname{codim}_W(t_G' \cap W) = 0$, alors $W \subseteq t_G'$. D'après l'inégalité (44), on a

$$\deg G' \leq 2^{g+1} \deg(G_0 \times G) D_0' (D_1')^{g_1} \cdots (D_n')^{g_n}.$$

D'après la condition (a), on en déduit que

$$d(u, V) = d((1, u), W) \leq \frac{2^{g+1} \deg(G_0 \times G)}{c_{26} S \deg G'}.$$

En appliquant le second point du lemme 6.4.3 au vecteur $(1, u)$ avec $\mathcal{G} = G_0 \times G$, $\mathcal{G}' = G'$, $\mathcal{H} = G_0 \times H$, on en déduit que pour tout $0 < m \leq S$, $m\mathbf{q} \notin G'(K)$ (pourvu que la constante c_{27} soit choisie suffisamment grande).

Étape 3 : Nous allons conclure en montrant que l'inégalité (44) contredit le lemme 7.3.2. Premièrement, remarquons qu'il existe $i \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $D_i \neq 0$. En effet, sinon tous les D_i' sont égaux à 1 et l'inégalité (44) entraîne

$$T^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right) \leq 2^{g+1} \deg(G_0 \times G).$$

D'après l'étape 2, on obtient $\min\{T, S+1\} \leq 2^{g+1} \deg(G_0 \times G)$, ce qui contredit la condition (b). Il existe donc au moins un entier $i \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $D_i \neq 0$.

On considère alors les entiers $0 \leq k_1 < \cdots < k_h \leq n$ pour lesquels $D_{k_i} \neq 0$, $1 \leq i \leq h$, et on note π la projection

$$\pi \colon G_0 \times G \to \prod_{i=1}^{h} G_{k_i}.$$

D'après les propriétés du polynôme $\mathscr{H}$ rappelées au paragraphe 6.1.1, on a (en posant $g_0 = 1$)

$$\begin{aligned} \mathscr{H}(G_0 \times G; D_0', \ldots, D_n') &= (g+1)! \prod_{D_i = 0} \frac{\deg(G_i)}{g_i!} \prod_{D_j \neq 0} \frac{\mathscr{H}(G_j; D_j)}{g_j!} \\ &= \frac{(g+1)!}{(\dim \pi(G_0 \times G))!} \prod_{D_i = 0} \frac{\deg(G_i)}{g_i!} \mathscr{H}(\pi(G_0 \times G); D_{k_1}, \ldots, D_{k_h}). \end{aligned}$$

Comme le coefficient multinomial

$$(\dim \pi(G_0 \times G))! \prod_{D_i \neq 0} \frac{1}{g_i!}$$

est un entier strictement positif, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(G_0 \times G; D'_0, \dots, D'_n) &\leq (g+1)! \prod_{D_j \neq 0} \frac{1}{g_j!} \prod_{D_i \neq 0} \frac{\deg(G_i)}{g_i!} \mathscr{H}(\pi(G_0 \times G); D_{k_1}, \dots, D_{k_h}) \\ &\leq (g+1)! \prod_{i=0}^{n} \frac{\deg(G_i)}{g_i!} \mathscr{H}(\pi(G_0 \times G); D_{k_1}, \dots, D_{k_h}) \\ &= (g+1) \deg(G) \cdot \mathscr{H}(\pi(G_0 \times G); D_{k_1}, \dots, D_{k_h}).\end{aligned}$$

On a aussi l'inégalité

$$\mathscr{H}(\pi(G'); D_{k_1}, \dots, D_{k_h}) \leq \mathscr{H}(G'; D'_0, \dots, D'_n).$$

En utilisant l'inégalité (44), on obtient

$$T^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right) \leq 2^{g+1}(g+1)\deg(G) \cdot \frac{\mathscr{H}(\pi(G_0 \times G); D_{k_1}, \dots, D_{k_h})}{\mathscr{H}(\pi(G'); D_{k_1}, \dots, D_{k_h})}.$$

Puisque $D_i = [D_i^{\#}] \leq D_i^{\#}$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on obtient l'inégalité

$$T^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right) \leq 2^{g+1}(g+1)\deg(G) \cdot \frac{\mathscr{H}(\pi(G_0 \times G); D_{k_1}^{\#}, \dots, D_{k_h}^{\#})}{\mathscr{H}(\pi(G'); D_{k_1}^{\#}, \dots, D_{k_h}^{\#})} \tag{45}$$

par croissance des applications partielles

$$x_i \mapsto \mathscr{H}(\pi(G_0 \times G); x_{k_1}, \dots, x_{k_h}) / \mathscr{H}(\pi(G'); x_{k_1}, \dots, x_{k_h})$$

(voir [**46**, propriété 4.4]). On considère le groupe G'' (vu comme un sous-groupe de $G_0 \times G$ après permutation éventuelle des facteurs) défini par

$$G'' = \pi(G') \times \prod_{j \notin \{k_1, \dots, k_h\}} G_j.$$

Le groupe G'' est un sous-groupe strict de $G_0 \times G$, car sinon $\pi(G') = \pi(G_0 \times G)$ et l'inégalité (45) ainsi que l'étape 2 entraînent $\min\{T, S+1\} \leq 2^{g+1}(g+1)\deg(G)$, ce qui contredit la condition (b) pourvu que l'on ait $c_{26} \geq 2^{g+1}(g+1)\deg(G)$. On a par ailleurs

$$\frac{\mathscr{H}(\pi(G_0 \times G); D_{k_1}^{\#}, \dots, D_{k_h}^{\#})}{\mathscr{H}(\pi(G'); D_{k_1}^{\#}, \dots, D_{k_h}^{\#})} = \frac{(\dim G'')!(\dim \pi(G_0 \times G))!}{(g+1)!(\dim \pi(G'))!} \cdot \frac{\mathscr{H}(G_0 \times G; D_0^{\#}, \dots, D_n^{\#})}{\mathscr{H}(G''; D_0^{\#}, \dots, D_n^{\#})}$$

et

- $\dim \pi(G_0 \times G) - \dim \pi(G') = \operatorname{codim}_{G_0 \times G} G'' = r''$,
- $\lambda'' = \operatorname{codim}_W(W \cap t_{G''}) \leq \operatorname{codim}_W(W \cap t_{G'}) = \lambda'$ (car $G' \subseteq G''$),
- $\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + G''(\overline{K})}{G''(\overline{K})}\right) \leq \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right)$.

D'après l'inégalité (45), on en déduit qu'il existe une constante c ne dépendant que de g telle que

$$T^{\lambda''} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + G''(\overline{K})}{G''(\overline{K})}\right) \mathscr{H}(G''; D_0^{\#}, \dots, D_n^{\#}) \leq c \deg G \mathscr{H}(G_0 \times G; D_0^{\#}, \dots, D_n^{\#}). \tag{46}$$

Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a par ailleurs $D_i^{\#} \leq [D_i^{\#}] + 1 = D_i + 1 \leq 2\max\{1, D_i\} = 2D'_i$. D'après l'hypothèse (c), on a donc

$$T \geq \frac{c_{26}}{2} \max\{D_0^{\#}/(S+1), D_1^{\#}, \dots, D_n^{\#}\}.$$

Si $C_0 > c\deg(G_0 \times G)\deg G = c(g+1)(\deg G)^2$, on montre que $t_{G''} + W \neq t_{G_0 \times G}$ en utilisant les mêmes arguments qu'à l'étape 1. On en déduit que si la constante c_{27} est suffisamment grande, l'inégalité (46) contredit le lemme 7.3.2, ce qui achève la démonstration.

□

7.3.4. Choix des paramètres. Nous allons maintenant fixer tous les paramètres introduits précédemment, à l'exception de la famille de polynômes $(P_{\lambda_0})_{\lambda_0 \leq D_0}$, que nous choisirons au paragraphe 7.3.10. Rappelons que l'on a noté $D = [K : \mathbb{Q}]/[K_{v_0} : \mathbb{Q}_{v_0}]$. Dans toute la suite, C_0 désigne un nombre réel supérieur à $\max\{c_{24}, c_{26}\} \geq 1$. Si $v_0|p_0$ est ultramétrique, on suppose également que $C_0 \geq \max\{e, \log p_0\}^2$.

7.3.4.1. *Cas archimédien.* Supposons que la place v_0 est archimédienne. Soit $\mathfrak{e} \geq e$ un nombre réel et soit $\mathfrak{a} \geq 1$ un nombre réel tel que

$$\mathfrak{a} \geq \frac{\max\{D, Dh(W), \log(\deg H), \log_+ \|u\|_{v_0}\}}{\log \mathfrak{e}}.$$

Posons alors $S_0 := [C_0\mathfrak{a}]$ et $S := [C_0^3\mathfrak{a}]$. On définit également les quantités

$$A_i := D \max_{k \leq (g+1)S} h(k\mathbf{p}_i) + (1 + C_0^3\mathfrak{a}\mathfrak{e}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

$$A_0 := D \log\left(e + \frac{C_0^3 D}{\log \mathfrak{e}}\right) + \log\left(1 + \frac{\mathfrak{e}C_0^3 D}{\log \mathfrak{e}}\right),$$

et

$$U := C_0 S_0 \log(\mathfrak{e}) \left(\frac{S+1}{C_0 S_0}\right)^{1/t} \left(\frac{C_0 A_0}{\log \mathfrak{e}} + C_0^2\right)^{1/t} \prod_{i=1}^{n} \left(C_0^2 + \frac{C_0 A_i}{S_0 \log \mathfrak{e}}\right)^{g_i/t}.$$

On pose alors

$$\widetilde{T} := \frac{U}{S_0 \log \mathfrak{e}},$$

$$\widetilde{D}_i := \frac{U}{C_0 A_i + C_0^2 S_0 \log \mathfrak{e}}, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

et

$$\widetilde{D}_0 := \frac{U}{C_0 A_0 + C_0^2 \log \mathfrak{e}}.$$

Rappelons que l'on a noté $T = [\widetilde{T}]$, $D_i = [x\widetilde{D}_i]$ et $D_i' = \max\{1, D_i\}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. On définit également

$$\alpha := \exp(U(g + 1 + \sqrt{C_0})).$$

Les propriétés suivantes découlent facilement des définitions précédentes et seront utilisées de façon récurrente dans la suite du texte.

LEMME 7.3.5. *Les inégalités suivantes sont vérifiées :*

(1) $x \leq 1$ *;*

(2) $\widetilde{T} > C_0^2$, $T > C_0$ *;*

(3) $(S_0 + 1)/(S + 1) \leq 2/C_0^2$, $S/S_0 \leq 2C_0^2$ *;*

(4) $T > C_0 \max\{D_0'/(S+1), D_1', \ldots, D_n'\}$ *;*

(5) $D_i \leq D_i' \leq \widetilde{D}_i \leq \widetilde{D}_i A_i \leq U/C_0 \quad \forall\, i \in \{0, \ldots, n\}$ *;*

(6) $\widetilde{D}_i \max_{k \leq (g+1)S} h(k\mathbf{p}_i) \leq \frac{U}{DC_0} \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$ *;*

(7) $\widetilde{D}_i(1 + S\mathfrak{e}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i} \leq \frac{U}{C_0} \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$.

Démonstration : Montrons le premier point. Par définition de x, on a l'implication

$$\frac{1}{\deg(G_0 \times G)} \frac{\widetilde{T}^{g+1-t}(S+1)}{C_0 \widetilde{D}_0 \widetilde{D}_1^{g_1} \cdots \widetilde{D}_n^{g_n}} = A(\{0\})^t \leq 1 \implies x \leq 1.$$

La définition de U correspond précisément à l'égalité $A(\{0\})^t = (C_0^t \deg(G_0 \times G))^{-1} \leq 1$, ce qui démontre le point (1). Les points suivants sont des conséquences immédiates des définitions et de l'inégalité $x \leq 1$.

□

7.3.4.2. *Cas ultramétrique.* Supposons que la place v_0 est ultramétrique. Considérons un nombre réel $\mathfrak{R}$ dans l'intervalle $]1; r_{p_0}/\|u\|_{v_0}[$ et soit $\mathfrak{a} \geq 1$ tel que

$$\mathfrak{a} \log \mathfrak{R} \geq D \max\{1, h(W)\} + \log_+((\log \mathfrak{R})^{-1}).$$

Posons $S_0 := [C_0 \mathfrak{a}]$ et $S := [C_0^3 \mathfrak{a}]$. On définit également les quantités

$$A_i := D \max_{k \leq (g+1)S} h(k\mathbf{p}_i), \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

$$A_0 := D \log \left(e + \frac{C_0^3 D}{\log \mathfrak{R}} \right) + \log \left(1 + \frac{\mathfrak{R} C_0 D}{\log \mathfrak{R}} \right),$$

et

$$U := C_0 S_0 \log \mathfrak{R} \left(\frac{S+1}{C_0 S_0} \right)^{1/t} \left(\frac{C_0 A_0}{\log \mathfrak{R}} + C_0^2 \right)^{1/t} \prod_{i=1}^{n} \left(C_0^2 + \frac{C_0 A_i}{S_0 \log \mathfrak{R}} \right)^{g_i/t}.$$

On pose alors

$$\widetilde{T} := \frac{U}{S_0 \log \mathfrak{R}},$$

$$\widetilde{D}_i := \frac{U}{C_0 A_i + C_0^2 S_0 \log \mathfrak{R}}, \quad i \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\widetilde{D}_0 := \frac{U}{C_0 A_0 + C_0^2 \log \mathfrak{R}}.$$

Rappelons que l'on a noté $T = [\widetilde{T}]$, $D_i = [x\widetilde{D}_i]$ et $D_i' = \max\{1, D_i\}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. Comme C_0 est supérieur à $(\log p_0)^2$, il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que

$$U(g+1+\sqrt{C_0}) \leq k \log p_0 \leq U(g+1+2\sqrt{C_0}).$$

On pose alors $\alpha := p_0^k \in |K_{v_0}^\times|_{v_0}$. On a ainsi

$$\exp(U(g+1+\sqrt{C_0})) \leq \alpha \leq \exp(U(g+1+2\sqrt{C_0})).$$

Comme dans le cas archimédien, énumérons quelques propriétés utiles satisfaites par ces paramètres.

Lemme 7.3.6. *Les inégalités suivantes sont vérifiées :*

(1) $x \leq 1$;
(2) $\widetilde{T} > C_0^2$, $T > C_0$;
(3) $(S_0+1)/(S+1) \leq 2/C_0^2$, $S/S_0 \leq 2C_0^2$;
(4) $T > C_0 \max\{D_0'/(S+1), D_1', \ldots, D_n'\}$;
(5) $D_i \leq D_i' \leq \widetilde{D}_i \leq \widetilde{D}_i A_i \leq U/C_0 \quad \forall\, i \in \{0, \ldots, n\}$;
(6) $\widetilde{D}_i \max_{k \leq (g+1)S} h(k\mathbf{p}_i) \leq \frac{U}{DC_0} \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}$;
(7) $S_0 \log \mathfrak{R} \geq \log S_0$.

Démonstration : Le premier point se démontre comme dans le cas archimédien, et les points (2) à (6) découlent immédiatement des définitions. Montrons le dernier point. Si $\log \mathfrak{R} \geq 1/\sqrt{C_0}$, on a

$$S_0 \log \mathfrak{R} \geq \frac{[C_0 \mathfrak{a}]}{\sqrt{C_0}} \geq \sqrt{C_0}\mathfrak{a} \geq \sqrt{C_0 \mathfrak{a}} \geq \log(C_0 \mathfrak{a}) \geq \log S_0$$

(l'avant-dernière inégalité est une conséquence de la croissance de la fonction $x \to \sqrt{x}/\log(x)$ sur $[e^2, +\infty[$). Supposons que $\log \mathfrak{R} < 1/\sqrt{C_0}$. On doit montrer que $f(S_0) \geq \frac{1}{\log \mathfrak{R}}$, où $f(x) = \frac{x}{\log x}$ pour $x > 1$. La fonction f est croissante sur $[e, +\infty[$. Or $S_0 \geq \frac{C_0 \log(1/\log \mathfrak{R})}{\log \mathfrak{R}}$. On a donc

$$\begin{aligned} f(S_0) &\geq \frac{C_0 \log(1/\log \mathfrak{R})}{\log \mathfrak{R}} \times \frac{1}{\log\log(1/\log \mathfrak{R}) + \log(1/\log \mathfrak{R}) + \log C_0} \\ &\geq \frac{C_0 \log(1/\log \mathfrak{R})}{\log \mathfrak{R}} \times \frac{1}{4\log(1/\log \mathfrak{R})} = \frac{C_0}{4 \log \mathfrak{R}} \geq \frac{1}{\log \mathfrak{R}}. \end{aligned}$$

□

7.3.4.3. *Hypothèse centrale et organisation de la suite du texte.* Nous allons raisonner par l'absurde afin de démontrer une minoration de la distance $d(u,V)$. Dans toute la suite, on fait l'hypothèse suivante.

Hypothèse 2. La distance $d(u,V)$ est inférieure à $\exp(-2\sqrt{C_0}U)$.

En particulier, les conclusions des lemmes 7.3.3 et 7.3.4 sont satisfaites. Au paragraphe 7.3.5, nous allons majorer le rang et la norme d'opérateur de la matrice $\mathcal{A}_0$. Cela nous permettra d'appliquer le lemme 1.1.22 (page 34) pour construire une section non nulle $s \in E \otimes_K \overline{K}$ de « petite » hauteur $h_\alpha(s)$ (§ 7.3.6). Nous construirons ensuite un jet de cette section. La suite de la preuve est consacrée à l'encadrement de la hauteur de ce jet, et aboutit à une contradiction. Nous en déduirons que l'hypothèse 2 est absurde, ce qui démontrera les théorèmes 7.2.3 et 7.2.4.

7.3.5. Étude de la matrice $\mathcal{A}_0$. L'objet de ce paragraphe est de majorer le rang et la norme d'opérateur de la matrice $\mathcal{A}_0$.

7.3.5.1. *Majoration du rang.* Le rang $\operatorname{rg}\mathcal{A}_0$ de la matrice $\mathcal{A}_0$ est égal au rang du système

$$\forall (m,\boldsymbol{\tau}) \in \boldsymbol{\Upsilon}, \quad D^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{w}} F_s(m, mu) = 0$$

en les inconnues p_i définies par $s = \sum_{i=1}^{\dim E} p_i s_i$. On note $\widetilde{\lambda} = \operatorname{codim}_W W \cap t_{\widetilde{G}}$. Les arguments de la démonstration du lemme 6.7 de [**67**] montrent que ce rang est inférieur à celui du système

$$\forall (m,\boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\widetilde{\lambda}}; 0 \leq m \leq S_0,\ |\boldsymbol{\tau}| \leq 2(g+1)T, \quad D^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{w}'} P(m\mathbf{q} + \widetilde{G}) = 0$$

où $\mathbf{w}'$ désigne une base d'un supplémentaire de $W \cap t_{\widetilde{G}}$ dans W si $\widetilde{\lambda} \geq 1$ (voir aussi la démonstration du lemme 6.1 de [**17**]), et où les inconnues du système sont les coordonnées des polynômes $P \in K[\mathbb{P}]_{\mathbf{D}}$ (dans une base quelconque de $K[\mathbb{P}]_{\mathbf{D}}$). On en déduit que

$$\operatorname{rg}(\mathcal{A}_0) \leq \operatorname{card}\{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{\widetilde{\lambda}},\ |\boldsymbol{\tau}| \leq 2(g+1)T\} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S_0) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right) \dim(\mathbb{C}_{v_0}[\mathbb{P}]/I_{\widetilde{G}})_{2\mathbf{D}},$$

où $I_{\widetilde{G}}$ désigne l'idéal des polynômes identiquement nuls sur $\widetilde{G}$. D'après un théorème de Chardin [**12**] (que l'on applique à un plongement de $\mathbb{P}$ dans un espace projectif, à la manière de [**67**, page 306]), il existe une constante $c'_{28} \geq 1$ ne dépendant que de g telle que

$$\dim(\mathbb{C}_{v_0}[\mathbb{P}]/I_{\widetilde{G}})_{2\mathbf{D}} \leq c'_{28} \mathscr{H}(\widetilde{G}; D'_0, \ldots, D'_n).$$

Rappelons que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, l'application partielle

$$x_i \mapsto \mathscr{H}(\widetilde{G}; x_0, \ldots, x_n) / \mathscr{H}(G_0 \times G; x_0, \ldots, x_n)$$

est décroissante (voir par exemple [**46**, propriété 4.4]). En remarquant que $D_i^{\#} \leq 2D'_i$ et en appliquant le lemme 7.3.2, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}\mathcal{A}_0 &\leq (2(g+1))^g c'_{28} \widetilde{T}^{\widetilde{\lambda}} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S_0) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right) \mathscr{H}(\widetilde{G}; D'_0, \ldots, D'_n) \\ &\leq (2(g+1))^g 2^{g+1} C_0 c'_{28} \frac{\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S_0) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right)}{\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right)} \mathscr{H}(G_0 \times G; D'_0, \ldots, D'_n). \end{aligned} \tag{47}$$

Le lemme suivant est une conséquence d'un théorème de Sombra [**75**], qui généralise un résultat de Nesterenko [**63**]. .

Lemme 7.3.7. *Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a*

$$\mathscr{H}(G_i, \ell) \leq g_i! \deg(G_i) \dim(K[\mathbb{P}^{N_i}]/I_{G_i})_\ell.$$

Démonstration : Soit $\ell \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. D'après le théorème 4 de [**75**] et la formule de Pascal pour les coefficients binomiaux, on a

$$\begin{aligned}\dim(K[\mathbb{P}^{N_i}]/I_{G_i})_\ell &\geq \binom{\ell+g_i+1}{g_i+1} - \binom{\ell-\deg(G_i)+g_i+1}{g_i+1}\\ &= \binom{\ell+g_i}{g_i} + \binom{\ell+g_i}{g_i+1} - \binom{\ell-\deg(G_i)+g_i+1}{g_i+1}\\ &\geq \binom{\ell+g_i}{g_i} \geq \frac{\ell^{g_i}}{g_i!}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\mathscr{H}(G_i,\ell) = \deg(G_i)\ell^{g_i} \leq g_i!\deg(G_i)\dim(K[\mathbb{P}^{N_i}]/I_{G_i})_\ell.$$

□

Remarque 7.3.8. Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et pour tout entier $\ell \geq \deg G_i$, le lemme 1 et le théorème 4 de [**75**] (voir aussi [**48**, page 92]) entraînent que

$$\begin{aligned}\dim(K[\mathbb{P}^{N_i}]/I_{G_i})_\ell &\geq \binom{\ell+g_i+1}{g_i+1} - \binom{\ell-\deg(G_i)+g_i+1}{g_i+1}\\ &= \sum_{j=1}^{\deg(G_i)} \binom{\ell+g_i+1-j}{g_i}\\ &\geq \deg(G_i)\frac{(\ell+1-\deg(G_i))^{g_i}}{g_i!}.\end{aligned}$$

En particulier, pour tout entier $\ell \geq 2(\deg(G_i)-1)$, on a

$$\mathscr{H}(G_i,\ell) \leq 2^{g_i}g_i!\dim(K[\mathbb{P}^{N_i}]/I_{G_i})_\ell.$$

Lemme 7.3.9. *L'inégalité*

$$\mathscr{H}(G_0\times G; D_0',\dots,D_n') \leq (g+1)!\deg(G)\dim E$$

est vérifiée.

Démonstration : Remarquons d'abord que

$$\dim E = \prod_{i=0}^n \dim\left(K[\mathbb{P}^{N_i}]/I_{G_i}\right)_{D_i} = D_0'\prod_{i=1}^n \dim\left(K[\mathbb{P}^{N_i}]/I_{G_i}\right)_{D_i}$$

et que le polynôme $\mathscr{H}$ vérifie

$$\mathscr{H}(G_0\times G; D_0',\dots,D_n') = (g+1)!D_0'\prod_{i=1}^n \frac{\mathscr{H}(G_i;D_i')}{g_i!}.$$

Soit $i \in \{1,\dots,n\}$. Si $D_i \neq 0$, alors $D_i = D_i'$ et d'après le lemme 7.3.7, on a

$$\frac{\mathscr{H}(G_i,D_i')}{g_i!} \leq \deg(G_i)\dim(K[\mathbb{P}^{N_i}]/I_{G_i})_{D_i}.$$

Si $D_i = 0$, alors $D_i' = 1 = \dim(K[\mathbb{P}^{N_i}]/I_{G_i})_{D_i}$ et on a

$$\mathscr{H}(G_i,D_i') = \deg(G_i) = \deg(G_i)\dim(K[\mathbb{P}^{N_i}]/I_{G_i})_{D_i}.$$

On en déduit que

$$\mathscr{H}(G_0\times G; D_0',\dots,D_n') \leq (g+1)!\prod_{i=1}^n \deg(G_i)\times\dim E \leq (g+1)!\deg(G)\dim E.$$

□

D'après l'inégalité (47) et le lemme 7.3.9, il existe une constante c_{28} telle que

$$\operatorname{rg}(\mathcal{A}_0) \leq c_{28} C_0 \frac{\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S_0)+\widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right)}{\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S)+\widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right)} \dim E.$$

En appliquant le lemme 7.3.3, on obtient la proposition suivante.

Proposition 7.3.10. *Il existe une constante $c_{28} = c_{29} \deg G$, où $c_{29} \geq 1$ ne dépend que de g, telle que l'on ait*

$$\frac{\operatorname{rg}(\mathcal{A}_0)}{\dim E} \leq c_{28} C_0 \frac{S_0+1}{S+1} \leq \frac{2c_{28}}{C_0}.$$

7.3.5.2. *Majoration de la norme d'opérateur de $\mathcal{A}_0$.* Nous allons maintenant majorer la quantité $\|\mathcal{A}_0\|_{v_0}$, définie par

$$\|\mathcal{A}_0\|_{v_0} = \sup \left\{ \frac{|\mathcal{A}_0 s|_{2,v_0}}{\|s\|_{E,v_0}} \mid s \in (E \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}) \setminus \{0\} \right\}.$$

La majoration que nous allons démontrer repose sur les deux lemmes qui suivent. Soit $(v_1, \ldots, v_{g-t})$ une base de $V \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ telle que $\|v_i\|_{v_0} \leq 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, g-t\}$. On considère la base $\mathbf{v}$ de $W \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ donnée par $\mathbf{v} = (e_0, v_1 \ldots, v_{g-t})$.

Lemme 7.3.11. *Soit $\boldsymbol{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{g-t}) \in \mathbb{N}^{g+1-t}$ et soit $s \in E \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$. Si $\mathbf{e}' = (e_0, e'_1, \ldots, e'_g)$ est une base orthonormée de $t_{G_0 \times G}(\mathbb{C}_{v_0})$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}_{v_0} \times \mathscr{U}$, on a*

$$\left| \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{v}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(z) \right|_{v_0} \leq c_{30}^{|\boldsymbol{\tau}|} \max \left\{ \left| \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}!} \mathcal{D}_{\mathbf{e}'}^{\boldsymbol{\sigma}} F_s(z) \right|_{v_0} \mid \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{N}^{g+1},\ \sigma_0 = \tau_0,\ |\boldsymbol{\sigma}| = |\boldsymbol{\tau}| \right\},$$

où $c_{30} = g^2 - 1$ si v_0 est archimédienne et $c_{30} = 1$ sinon.

Démonstration : La base $\mathbf{e}'$ identifie l'espace $t_{G_0 \times G}(\mathbb{C}_{v_0})$ à $\mathbb{C}_{v_0}^{g+1}$. Pour tout entier $i \in \{1, \ldots, g-t\}$, on note $(x_{i,j})_{1 \leq j \leq g}$ les coordonnées de v_i dans la base $\mathbf{e}'$:

$$v_i = \sum_{j=1}^{g} x_{i,j} e'_j.$$

Notons également

$$\mathcal{T} = \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{i,j})_{1 \leq i \leq g-t, 1 \leq j \leq g} \in \mathbb{N}^{g(g-t)} \mid \forall\ 1 \leq i \leq g-t,\ \sigma_{i,1} + \ldots + \sigma_{i,g} = |\boldsymbol{\tau}_i|\}.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{v}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(z) &= \left(\frac{1}{\tau_0!} \left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\tau_0} \left(\prod_{i=1}^{g-t} \frac{1}{\tau_i!} \left(\sum_{j=1}^{g} x_{i,j} \frac{\partial}{\partial z_j} \right)^{\tau_i} \right) F_s \right)(z) \\
&= \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{T}} \left(\prod_{\substack{1 \leq i \leq g-t \\ 1 \leq j \leq g}} \frac{x_{i,j}^{\sigma_{i,j}}}{\sigma_{i,j}!} \right) \left(\frac{1}{\tau_0!} \left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\tau_0} \right) \\
&\quad \times \left(\prod_{k=1}^{g} \left(\frac{\partial}{\partial z_k}\right)^{\sigma_{1,k}+\cdots+\sigma_{g-t,k}} \right) F_s(z) \\
&= \sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{T}} \left(\prod_{i,j} x_{i,j}^{\sigma_{i,j}} \right) \times \left(\prod_{k=1}^{g} \frac{(\sigma_{1,k} + \cdots + \sigma_{g-t,k})!}{\sigma_{1,k}! \cdots \sigma_{g-t,k}!} \right) \\
&\quad \times \frac{1}{\tau_0!} \left(\frac{\partial}{\partial z_0}\right)^{\tau_0} \times \prod_{\ell=1}^{g} \frac{1}{(\sigma_{1,\ell} + \cdots + \sigma_{g-t,\ell})!} \left(\frac{\partial}{\partial z_\ell}\right)^{\sigma_{1,\ell}+\cdots+\sigma_{g-t,\ell}} F_s(z).
\end{aligned}$$

Par hypothèse, $|x_{i,j}|_{v_0} \leq 1\ \forall i, j$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, g-t\}$, le coefficient multinomial

$$\frac{(\sigma_{1,k} + \cdots + \sigma_{g-t,k})!}{\sigma_{1,k}! \cdots \sigma_{g-t,k}!}$$

est un entier naturel, ce qui démontre le lemme si la place v_0 est finie. Dans le cas archimédien, il suffit de remarquer que

$$\sum_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{T}} \prod_{k=1}^{g} \frac{(\sigma_{1,k} + \cdots + \sigma_{g-t,k})!}{\sigma_{1,k}! \cdots \sigma_{g-t,k}!} \leq ((g-t)(g+1))^{|\boldsymbol{\tau}|}.$$

$\square$

LEMME 7.3.12. *Soit $\boldsymbol{\tau} = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{g-t}) \in \mathbb{N}^{g+1-t}$ et soit $s \in E \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$. Si v_0 est archimédienne, alors pour tout $z \in \mathbb{C}_{v_0} \times \mathbb{C}_{v_0}^{g_1} \times \cdots \times \mathbb{C}_{v_0}^{g_n} \simeq t_{G_0 \times G}(\mathbb{C}_{v_0})$, on a*

$$\left| \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{v}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(z) \right|_{v_0} \leq (g^2-1)^{|\boldsymbol{\tau}|} D_0' \prod_{i=1}^{n} \exp(c_{31} D_i'(1 + \|z_i\|_{v_0})^{\rho_i}) \max_{\lambda_0 \leq D_0} \left| \frac{P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}}{\tau_0!}(z_0) \right|_{v_0} \|s\|_{E,v_0},$$

où z_i désigne la projection de z sur $\mathbb{C}_{v_0}^{g_i}$ et c_{31} est une constante ne dépendant que de $\phi, \|.\|_{v_0}, g$. Si v_0 est une place finie, alors pour tout $z \in \mathbb{C}_{v_0} \times D(0, r_{p_0})$,

$$\left| \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{v}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(z) \right|_{v_0} \leq \max_{\lambda_0 \leq D_0} \left| \frac{P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}}{\tau_0!}(z_0) \right|_{v_0} \|s\|_{E,v_0}.$$

Démonstration : On considère l'ensemble

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{N} \times \prod_{i=0}^{n} \mathbb{N}^{N_i+1} \mid \lambda_0 \leq D_0,\ \boldsymbol{\lambda}_i = (\lambda_{i,j})_{0 \leq j \leq N_i},\ |\boldsymbol{\lambda}_i| = D_i\}.$$

Soit $s \in E \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$. Il existe une unique famille $(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} \in (\mathbb{C}_{v_0})^{\operatorname{card} \Lambda}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}_{v_0} \times \mathscr{U}$, on ait

$$F_s(z) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} P_{\lambda_0}(z_0) \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{N_i} \varphi_{i,j}^{\lambda_{i,j}}(z_i)$$

et $\|s\|_{E,v_0} = |(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}}|_{2,v_0}$. Pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, on note

$$\Psi_i^{\boldsymbol{\lambda}_i} = \prod_{j=0}^{N_i} \varphi_{i,j}^{\lambda_{i,j}} \quad \text{et} \quad F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}} = P_{\lambda_0} \prod_{i=1}^{n} \Psi_i^{\boldsymbol{\lambda}_i}.$$

Supposons que la place v_0 est archimédienne. Soit $\mathbf{e}'$ est une base orthonormée de $t_{G_0 \times G}(\mathbb{C}_{v_0})$ obtenue par concaténation de bases des espaces vectoriels t_{G_i}, $0 \leq i \leq n$. La base $\mathbf{e}'$ permet d'identifier $t_{G_0 \times G}(\mathbb{C}_{v_0})$ à $\mathbb{C}_{v_0} \times \mathbb{C}_{v_0}^{g_1} \times \cdots \times \mathbb{C}_{v_0}^{g_n}$. D'après le lemme 7.3.11 on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{v}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(z) \right|_{v_0} &\leq (g^2-1)^{|\boldsymbol{\tau}|} \max_{\substack{|\boldsymbol{\sigma}| = |\boldsymbol{\tau}| \\ \sigma_0 = \tau_0}} \left| \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}!} \mathcal{D}_{\mathbf{e}'}^{\boldsymbol{\sigma}} F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}(z) \right|_{v_0} \\ &\leq (g^2-1)^{|\boldsymbol{\tau}|} \|s\|_{E,v_0} \operatorname{card} \Lambda \max_{\substack{|\boldsymbol{\sigma}| = |\boldsymbol{\tau}| \\ \sigma_0 = \tau_0 \\ \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda}} \left| \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}!} \mathcal{D}_{\mathbf{e}'}^{\boldsymbol{\sigma}} F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}(z) \right|_{v_0}. \end{aligned} \tag{48}$$

Le cardinal de l'ensemble Λ est inférieur à $D_0'(D_1')^{N_1} \cdots (D_n')^{N_n}$. Soit $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ et $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{N}^{g+1-t}$. On a

$$\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}!} \mathcal{D}_{\mathbf{e}'}^{\boldsymbol{\sigma}} F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}(z) = \frac{P_{\lambda_0}^{(\sigma_0)}}{\sigma_0!}(z_0) \prod_{i=1}^{n} \left(\left(\prod_{j=1}^{g_i} \frac{1}{\sigma_{i,j}!} \left(\frac{\partial}{\partial z_{i,j}} \right)^{\sigma_{i,j}} \right) \prod_{k=0}^{N_i} \varphi_{i,k}^{\lambda_{i,k}}(z_i) \right).$$

Soit $\ell \in \{1, \dots, n\}$. Pour tout $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_{g_\ell}) \in [0, 2\pi]^{g_\ell}$, on note $z_{\boldsymbol{\theta}} = (e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_{g_\ell}}) \in \mathbb{C}_{v_0}^{g_\ell}$. D'après l'inégalité de Cauchy, on a

$$\begin{aligned}
\left| \prod_{j=1}^{g_\ell} \frac{1}{\sigma_{\ell,j}!} \left(\frac{\partial}{\partial z_{\ell,j}} \right)^{\sigma_{\ell,j}} \prod_{k=0}^{N_\ell} \varphi_{\ell,k}^{\lambda_{\ell,k}}(z_\ell) \right|_{v_0} &\leq \sup_{\boldsymbol{\theta} \in [0,2\pi]^{g_\ell}} \left| \prod_{k=0}^{N_\ell} \varphi_{\ell,k}^{\lambda_{\ell,k}}(z_\ell + z_{\boldsymbol{\theta}}) \right|_{v_0} \\
&\leq \sup_{\boldsymbol{\theta},k} |\varphi_{\ell,k}(z_\ell + z_{\boldsymbol{\theta}})|_{v_0}^{D_\ell} \\
&\leq \exp(c_{19} D_\ell (1 + \|z_\ell\|_{v_0} + \|z_{\boldsymbol{\theta}}\|_{v_0})^{\rho_\ell}) \\
&\leq \exp(c D_\ell (1 + \|z_\ell\|_{v_0})^{\rho_\ell}),
\end{aligned}$$

où c est une constante ne dépendant que de $\phi, \|.\|_{v_0}, g$. On en déduit la majoration voulue si v_0 est archimédienne en posant $c_{31} = c + N_i$. Supposons maintenant que la place v_0 est finie et soit $z \in \mathbb{C}_{v_0} \times D(0, r_{p_0})$. On a dans ce cas

$$\left| \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{v}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(z) \right|_{v_0} \leq \|s\|_{E,v_0} \max_{\substack{|\boldsymbol{\sigma}| = |\boldsymbol{\tau}| \\ \sigma_0 = \tau_0 \\ \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda}} \left| \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}!} \mathcal{D}_{(e_0, \mathbf{e})}^{\boldsymbol{\sigma}} F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}(z) \right|_{v_0},$$

où la base $\mathbf{e}$ a été définie page 116. Par choix de la base $\mathbf{e}$, on connaît un développement en série entière à coefficients dans $\mathscr{O}_{K_{v_0}}$ de $\prod_{i=1}^n \Psi^{\boldsymbol{\lambda}_i}$ pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, convergeant sur $D(0, r_{p_0})$: $\forall \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, $\exists (a_{\mathbf{n},\boldsymbol{\lambda}})_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^g} \in \mathscr{O}_{K_{v_0}}^{\mathbb{N}^g}$,

$$F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}(\mathbf{z}) = P_{\lambda_0}(z_0) \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^g} \frac{a_{\mathbf{n},\boldsymbol{\lambda}}}{\mathbf{n}!} \mathbf{z}_1^{\mathbf{n}}, \quad \forall \mathbf{z} = (z_0, \mathbf{z}_1) \in \mathbb{C}_{v_0} \times D(0, r_{p_0}).$$

On en déduit que pour tout $(z_0, \mathbf{z}_1) \in \mathbb{C}_{v_0} \times D(0, r_{p_0})$ et pour tout élément $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_0, \boldsymbol{\sigma}_1) = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_g)$ de $\mathbb{N}^{g+1}$, on a

$$\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}!} \mathcal{D}_{(e_0, \mathbf{e})}^{\boldsymbol{\sigma}} F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}(z_0, \mathbf{z}_1) = \frac{P_{\lambda_0}^{(\sigma_0)}}{\sigma_0!}(z_0) \sum_{\mathbf{n}} \frac{a_{\mathbf{n},\boldsymbol{\lambda}}}{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}_1)!} \mathbf{z}_1^{\mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}_1},$$

où $\mathbf{n}$ parcourt l'ensemble $\{(n_1, \dots, n_g) \in \mathbb{N}^g,\ n_j \geq \sigma_j \ \forall\ 1 \leq j \leq g\}$. La majoration $r_{p_0}^{|\mathbf{n}|} \leq |\mathbf{n}!|_{v_0}$ pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^g$ entraîne alors

$$\left| \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}!} \mathcal{D}_{(e_0, \mathbf{e})}^{\boldsymbol{\sigma}} F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}(z) \right|_{v_0} \leq \left| \frac{P_{\lambda_0}^{(\sigma_0)}}{\sigma_0!}(z_0) \right|_{v_0},$$

ce qui démontre le lemme.

□

Nous pouvons maintenant énoncer la majoration de $\|\mathcal{A}_0\|_{v_0}$ dont nous aurons besoin par la suite.

Proposition 7.3.13. *Si v_0 est une place archimédienne, il existe une constante $c_{32} \geq 1$ (ne dépendant que de ϕ, $\|.\|_{v_0}$, g) telle que la norme d'opérateur de $\mathcal{A}_0$ vérifie*

$$\|\mathcal{A}_0\|_{v_0} \leq \exp\left(\frac{c_{32} U}{C_0} \right) \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ m \in \mathbb{N}, m \leq S_0 \\ h \leq 2(g+1)T}} \left| \frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(m) \right|_{v_0}.$$

Si la place v_0 est ultramétrique, alors on a

$$\|\mathcal{A}_0\|_{v_0} \leq \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ m \in \mathbb{N}, m \leq S_0 \\ h \leq 2(g+1)T}} \left| \frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(m) \right|_{v_0}.$$

Démonstration : Supposons que la place v_0 est archimédienne. D'après la définition de $\|\mathcal{A}_0\|_{v_0}$ et le lemme 7.3.12 (et par une majoration grossière de card $\boldsymbol{\Upsilon}$), il existe une constante c telle que

$$\|\mathcal{A}_0\|_{v_0} \leq S_0 e^{4(g^2-1)T} D'_0 \prod_{i=1}^{n} \exp(c_{31} D'_i (1 + S_0 \|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}) \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ m \in \mathbb{N}, m \leq S_0 \\ h \leq 2(g+1)T}} \left| \frac{P^{(h)}_{\lambda_0}}{h!}(m) \right|_{v_0}.$$

Par ailleurs, le lemme 7.3.5 entraîne les inégalités

$$S_0 \leq e^{S_0} \leq e^{U/\widetilde{T}} \leq e^{U/C_0}, \quad D'_0 \prod_{i=1}^{n} \exp(c_{31} D'_i (1 + S_0 \|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}) \leq e^{(1+nc_{31})U/C_0},$$

et on a

$$e^{4(g^2-1)T} \leq \exp(4(g^2-1)U/[C_0 \mathfrak{a}]) \leq \exp(8(g^2-1)U/C_0).$$

On en déduit que

$$\|\mathcal{A}_0\|_{v_0} \leq \exp\left(\frac{cU}{C_0}\right) \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ m \in \mathbb{N}, m \leq S_0 \\ h \leq 2(g+1)T}} \left| \frac{P^{(h)}_{\lambda_0}}{h!}(m) \right|_{v_0},$$

où $c = 2 + 8(g^2-1) + nc_{31}$. Si la place v_0 est finie, le lemme est une conséquence immédiate de la définition de $\|\mathcal{A}_0\|_{v_0}$ et du lemme 7.3.12.

□

7.3.6. Construction d'une section auxiliaire. Les majorations du paragraphe 7.3.5 vont nous permettre de construire un élément non nul de $E \otimes_K \overline{K}$ de « petite » hauteur en appliquant le lemme de Siegel approché du paragraphe 1.1.

Proposition 7.3.14. *Il existe une constante c_{33} et une section $s \in E \otimes_K \overline{K} \setminus \{0\}$ telle que :*

$$h_\alpha(s) \leq \frac{c_{33}}{D\sqrt{C_0}} \left(U + \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ m \in \mathbb{N}, m \leq S_0 \\ h \leq 2(g+1)T}} \log \left| \frac{P^{(h)}_{\lambda_0}}{h!}(m) \right|_{v_0} \right).$$

De plus, la constante c_{33} est de la forme $c_{34} \deg G$, où c_{34} ne dépend que de ϕ, $\|.\|_{v_0}$, g.

Démonstration : D'après le lemme 1.1.22 (page 34), il existe une section non nulle $s \in E \otimes_K \overline{K}$ telle que

$$(49) \qquad h_\alpha(s) \leq \frac{[K_{v_0} : \mathbb{Q}_{v_0}]}{[K : \mathbb{Q}]} \times \frac{\mathrm{rg}(\mathcal{A}_0)}{\dim E} \left(\log_+(2\alpha \|\mathcal{A}_0\|_{v_0})\right) + \frac{1}{2}\log(\dim E) - \widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(E).$$

Avec notre choix de normes $(\|.\|_{E,v})_{v \in \Sigma_K}$, la pente $\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(E)$ de E est nulle. De plus, $\dim E \leq D'_0 (D'_1)^{g_1} \cdots (D'_n)^{g_n}$. D'après les lemmes 7.3.5 et 7.3.6, on a aussi

$$\frac{1}{2}\log(\dim E) \leq \frac{1}{2}(\log D'_0 + \sum_{i=1}^{n} g_i \log D'_i) \leq \frac{g+1}{2} \log \frac{U}{DC_0} \leq \frac{g+1}{2} \times \frac{U}{DC_0}.$$

Par ailleurs, on a $\log \alpha \leq (2\sqrt{C_0} + g + 1)U$ (dans le cas archimédien, on a même l'égalité $\log \alpha = (\sqrt{C_0} + g + 1)U$). D'après les propositions 7.3.10 et 7.3.13, l'inégalité (49) entraîne

$$h_\alpha(s) \leq \frac{2c_{28}}{DC_0} \left(2(\sqrt{C_0} + g + 1)U + \frac{c_{32}U}{C_0} + \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ m \in \mathbb{N}, m \leq S_0 \\ h \leq 2(g+1)T}} \log \left| \frac{P^{(h)}_{\lambda_0}}{h!}(m) \right|_{v_0} \right),$$

ce qui implique la conclusion du lemme.

□

7.3.7. Construction d'un jet et premières estimations. Considérons un élément non nul $s \in E \otimes_K \overline{K}$ dont la hauteur $h_\alpha(s)$ vérifie la majoration de la proposition 7.3.14. Soit $(m,\ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le couple minimal (pour l'ordre lexicographique) pour lequel il existe un élément $\boldsymbol{\tau}$ de $\mathbb{N}^{g+1-t}$ tel que $|\tau| = \ell$ et $\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu) \neq 0$. D'après le lemme 7.3.4, on a $m \leq (g+1)S$ et $\ell \leq (g+1)T$. Soit K' une extension finie de K telle que $s \in E \otimes_K K'$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on choisit un entier $\varepsilon_i \in \{0, \ldots, N_i\}$ vérifiant

$$|\varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)|_{v_0} = \max_{0 \leq j \leq N_i} |\varphi_{i,j}(mu_i)|_{v_0}.$$

En particulier, on a $\varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i) \neq 0$. Soit $(b_1, \ldots, b_{g-t})$ une K-base de V ; on considère la base $\mathbf{b}$ de W donnée par $\mathbf{b} = (b_0 = e_0, b_1, \ldots, b_{g-t})$. Dans ces conditions, on dispose du résultat suivant :

Lemme 7.3.15 (Lemme 4.10 de [**35**]). *Pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g+1-t}$ tel que $|\boldsymbol{\tau}| = \ell$, le coefficient de Taylor « tordu »*

$$\prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)$$

appartient à K'.

Démonstration : Nous reprenons les arguments de [**35**]. Considérons une famille $(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda}$ d'éléments de K' telle que

$$F_s = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} P_{\lambda_0} \prod_{i,j} \varphi_{i,j}^{\lambda_{i,j}}$$

et notons Q le polynôme défini par

$$Q(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} \frac{P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}}{\tau_0!}(m) \prod_{i=1}^{n} A^{(i)}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i), \mathbf{X}_i)^{\boldsymbol{\lambda}_i}$$

Par la formule de Leibniz et la définition de ℓ, on a

$$\prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu) = \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\tau}} \left(\frac{F_s(m+z_0, mu+z)}{\prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i+z_i)^{D_i}} \right) \Bigg|_{(z_0,z)=(0,0)},$$

où z_i désigne la projection de $z \in t_G(\mathbb{C}_{v_0})$ sur $t_{G_i}(\mathbb{C}_{v_0})$. Par définition et par homogénéité des polynômes $A_j^{(i)}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{F_s(m+z_0, mu+z)}{\prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i+z_i)^{D_i}} &= \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} P_{\lambda_0}(m+z_0) \prod_{i,j} \left(\frac{\varphi_{i,j}}{\varphi_{i,\varepsilon_i}}(mu_i+z_i) \right)^{\lambda_{i,j}} \\
&= \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} P_{\lambda_0}(m+z_0) \prod_{i,j} \left(\frac{A_j^{(i)}(\Psi_i(mu_i), \Psi_i(z_i))}{A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Psi_i(mu_i), \Psi_i(z_i))} \right)^{\lambda_{i,j}} \\
&= \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} P_{\lambda_0}(m+z_0) \prod_{i,j} \left(\frac{A_j^{(i)}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i), \Psi_i(z_i))}{A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i), \Psi_i(z_i))} \right)^{\lambda_{i,j}} \\
&= \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} P_{\lambda_0}(m+z_0) \prod_{i,j} A_j^{(i)}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i), \Psi_i(z_i))^{\lambda_{i,j}} \\
&\quad \times \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i), \Psi_i(z_i))^{D_i}}.
\end{aligned}$$

En dérivant par rapport à z_0, on a

$$\frac{\mathcal{D}_{b_0}^{\tau_0}}{\tau_0!} \left(\frac{F_s(m+z_0, mu+z)}{\prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i+z_i)^{D_i}} \right) \Bigg|_{z_0=0} = \frac{F_Q(z)}{A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i), \Psi_i(z_i))^{D_i}},$$

où $F_Q = Q \circ \Psi$. En particulier, la dérivée $D_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\sigma}} F_Q(0)$ est nulle pour tout $|\boldsymbol{\sigma}| < \ell - \tau_0$. On déduit alors de la formule de Leibniz l'égalité

$$(50)\quad \prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)$$
$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i), (1:0:\cdots:0))^{D_i}} \frac{\mathcal{D}_{b_1}^{\tau_1} \cdots \mathcal{D}_{b_{g-t}}^{\tau_{g-t}}}{\tau_1! \cdots \tau_{g-t}!} F_Q(0).$$

Rappelons que les polynômes $A^{(i)}$ sont à coefficients dans K et que $\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i) \in K$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ainsi,

$$F_Q = Q \circ \Psi = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} \frac{P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}}{\tau_0!}(m) \prod_{i=1}^{n} A^{(i)}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i), \Psi_i)^{\boldsymbol{\lambda}_i}$$

est un élément de l'anneau $K'[(\varphi_{i,j})_{1 \le i \le n, 0 \le j \le N_i}]$. Comme $\Psi_i(0) = (\varphi_{i,0}(0), \ldots, \varphi_{i,N_i})(0)) = (1, 0, \ldots, 0)$ et que l'anneau

$$K[(\varphi_{i,j}/\varphi_{i,0})_{1 \le i \le n, 0 \le j \le N_i}]$$

est stable par dérivation, le membre de droite de (50) est clairement un élément de K'. Le lemme est donc démontré.

□

On note $\mathbf{b}^\vee$ la base duale de $\mathbf{b}$. On considère alors l'élément $\mathcal{J}$ du produit symétrique $S^\ell(W^\vee) \otimes_K K'$ défini par

$$\mathcal{J} = \sum_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g+1-t} \\ |\boldsymbol{\tau}| = \ell}} \prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)(\mathbf{b}^\vee)^{\boldsymbol{\tau}}.$$

Lemme 7.3.16. *Le vecteur $\mathcal{J} \in S^\ell(W^\vee) \otimes_K K'$ ne dépend pas du choix de la base* $\mathbf{b}$.

Démonstration : Soient $\mathbf{b}_1$ et $\mathbf{b}_2$ deux bases de W et soit $x \in W$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}_{v_0}$ tel que le vecteur $(m, mu) + \lambda x$ de $t_{G_0 \times G}(\mathbb{C}_{v_0})$ appartienne à $\mathbb{C}_{v_0} \times \mathscr{U}$, on a les égalités

$$F_s((m, mu) + \lambda x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g+1-t} \\ |\boldsymbol{\tau}| = k}} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}_1}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)(\mathbf{b}_1^\vee)^{\boldsymbol{\tau}}(\lambda x)$$
$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g+1-t} \\ |\boldsymbol{\tau}| = k}} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}_1}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)(\mathbf{b}_1^\vee)^{\boldsymbol{\tau}}(x) \right) \lambda^k.$$

De même, on a

$$F_s((m, mu) + \lambda x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g+1-t} \\ |\boldsymbol{\tau}| = k}} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}_2}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)(\mathbf{b}_2^\vee)^{\boldsymbol{\tau}}(x) \right) \lambda^k.$$

On en déduit que pour tout $x \in W$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g+1-t} \\ |\boldsymbol{\tau}| = k}} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}_1}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)(\mathbf{b}_1^\vee)^{\boldsymbol{\tau}}(x) = \sum_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g+1-t} \\ |\boldsymbol{\tau}| = k}} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}_2}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)(\mathbf{b}_2^\vee)^{\boldsymbol{\tau}}(x),$$

et donc

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g+1-t} \\ |\boldsymbol{\tau}| = k}} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}_1}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)(\mathbf{b}_1^\vee)^{\boldsymbol{\tau}} = \sum_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g+1-t} \\ |\boldsymbol{\tau}| = k}} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}_2}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)(\mathbf{b}_2^\vee)^{\boldsymbol{\tau}},$$

ce qui démontre le lemme.

□

On munit $S^\ell(W^\vee)$ de la structure de fibré adélique quotient de celle de $(W^\vee)^{\otimes \ell}$ induite par celle de W (voir le chapitre 1.1). Concrètement, si $\mathbf{b}$ est une base orthonormée de $W \otimes_K \mathbb{C}_v$ pour une place v de K', alors

$$\|\mathcal{J}\|_v^2 = \sum_{|\boldsymbol{\tau}|=\ell} \frac{\boldsymbol{\tau}!}{\ell!} \left| \prod_{i=1}^n \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu) \right|_v^2$$

si v est archimédienne et

$$\|\mathcal{J}\|_v = \max_{|\boldsymbol{\tau}|=\ell} \left| \prod_{i=1}^n \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu) \right|_v$$

sinon. Remarquons $\boldsymbol{\tau}!/\ell! \leq 1$ pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g-t+1}$ tel que $|\boldsymbol{\tau}| = \ell$ (car $\ell!/\boldsymbol{\tau}! \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ est un coefficient multinomial).

L'objectif de la suite du texte est d'obtenir un encadrement suffisamment fin de la hauteur de $\mathcal{J}$ afin d'aboutir à une contradiction. La négation de l'hypothèse 2 fournira alors une minoration de la distance $d(u, V)$ (sous l'hypothèse 1). Pour les places $v \in \Sigma_{K'}$, $v \nmid v_0$, on a une majoration de $\|\mathcal{J}\|_v$ donnée par les résultats des paragraphes 4.2 et 4.3 de [**35**], que nous allons rappeler maintenant. Nous obtiendrons une majoration de la quantité

$$\sum_{\substack{v \in \Sigma_{K'} \\ v \nmid v_0}} \frac{[K'_v : \mathbb{Q}_v]}{[K' : \mathbb{Q}]} \log \|\mathcal{J}\|_v. \tag{51}$$

7.3.7.1. *Estimations ultramétriques.* Rappelons que l'on a défini un modèle lisse $\mathcal{G} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K[\frac{1}{\widetilde{m}}]$ de G au paragraphe 7.1. Si v est une place finie de K' ne divisant pas $\widetilde{m}$, on note $\widehat{\mathcal{G}}_v$ (respectivement $\widehat{H}_v$) le complété formel à l'origine du schéma $\mathcal{G} \times \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'_v}$ (respectivement du schéma $H \times_K \operatorname{Spec} K'_v$). De cette façon, $\widehat{H}_v$ est un sous-schéma formel lisse du schéma formel $\widehat{G}_{K'_v} := \widehat{\mathcal{G}}_v \widehat{\otimes} \operatorname{Spec} K'_v$. On note alors $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)$ la taille de $\widehat{H}_v$ relativement au modèle $\widehat{\mathcal{G}}_v$ de $\widehat{G}_{K'_v}$, comme définie par Bost au paragraphe 3.1 de [**8**] (voir aussi [**35**, page 243]). On démontre alors la proposition suivante, qui est un cas particulier de la proposition 4.11 de [**35**].

Proposition 7.3.17. *Soit $v \in \Sigma_{K'}$ une place finie ne divisant pas $\widetilde{m}$. Alors*

$$\|\mathcal{J}\|_v \leq \|s\|_{E,v} \left(\prod_{i=1}^n \max_{0 \leq j \leq N_i} \left| \frac{\varphi_{i,j}}{\varphi_{i,\varepsilon_i}}(mu_i) \right|_v^{c_{18} D_i} \right) \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ h \leq \ell}} \left| \frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(m) \right|_v$$
$$\times R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)^{-\ell} \prod_{i=1}^n |A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i), (1:0:\cdots:0))|_v^{-D_i}.$$

Si $v \in \Sigma_{K'}$ divise $\widetilde{m}$, alors la même majoration reste vraie en remplaçant $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)^{-\ell}$ par $c_{35}^{\ell + D_1 + \cdots + D_n}$, où $c_{35} \geq 1$ ne dépend que de ϕ et de g.

Démonstration : Soit $\boldsymbol{\tau} = (\tau_0, \ldots, \tau_{g-t}) \in \mathbb{N}^{g-t}$ tel que $|\boldsymbol{\tau}| = \ell$. Considérons à nouveau le polynôme

$$Q(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} \frac{P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}}{\tau_0!}(m) \prod_{i=1}^n A^{(i)}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i), \mathbf{X}_i)^{\boldsymbol{\lambda}_i},$$

où $(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda}$ est une famille d'éléments de K' telle que

$$F_s = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} P_{\lambda_0} \prod_{i,j} \varphi_{i,j}^{\lambda_{i,j}}.$$

Au cours de la démonstration du lemme 7.3.15, nous avons établi les égalités

$$\frac{\mathcal{D}_{b_0}^{\tau_0}}{\tau_0!} \left(\frac{F_s(m + z_0, mu + z)}{\prod_{i=1}^n \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i + z_i)^{D_i}} \right) \bigg|_{z_0 = 0} = \frac{F_Q(z)}{A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i), \Psi_i(z_i))^{D_i}},$$

où $F_Q = Q \circ \Psi_{v_0}$, et

$$\prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i), (1:0:\cdots:0))^{D_i}} \frac{\mathcal{D}_{b_1}^{\tau_1} \cdots \mathcal{D}_{b_{g-t}}^{\tau_{g-t}}}{\tau_1! \cdots \tau_{g-t}!} F_Q(0). \tag{52}$$

Soit v une place finie de K' et soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Les anneaux

$$K[(\varphi_{v,i,j}/\varphi_{v,i,0})_{0 \leq j \leq N_i}], \quad K[(\varphi_{v_0,i,j}/\varphi_{v_0,i,0})_{0 \leq j \leq N_i}]$$

sont stables par dérivation selon un vecteur de t_{G_i}, et

$$(\varphi_{v,i,0}, \ldots, \varphi_{v,i,N_i})(0) = (\varphi_{v_0,i,0}, \ldots, \varphi_{v_0,i,N_i})(0) = (1, 0, \ldots, 0).$$

En appliquant les formules de dérivations de fonctions composées de plusieurs variables, on en déduit que

$$\mathcal{D}_{b_1}^{\sigma_1} \cdots \mathcal{D}_{b_{g-t}}^{\sigma_{g-t}} F_Q(0) = \mathcal{D}_{b_1}^{\sigma_1} \cdots \mathcal{D}_{b_{g-t}}^{\sigma_{g-t}} F_{Q,v}(0)$$

pour tout $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{N}^{g-t}$, où $F_{Q,v} = Q \circ \Psi_v$ (rappelons que $F_Q = Q \circ \Psi_{v_0}$). En particulier les dérivées $\mathcal{D}_{b_1}^{\sigma_1} \cdots \mathcal{D}_{b_{g-t}}^{\sigma_{g-t}} F_{Q,v}(0)$ sont nulles pour tout $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{N}^{g-t}$ tel que $|\boldsymbol{\sigma}| < \ell - \tau_0$. On en déduit que $F_{Q,v}$ satisfait les hypothèses du corollaire 4.5 de [**35**] (qui est une conséquence du lemme 3.3 de [**8**]) pour toute place finie v ne divisant pas $\widetilde{m}$. D'après le lemme 7.3.16, on peut supposer sans perte de généralité que tous les vecteurs de la base $\mathbf{b}$ sont de norme $\|.\|_v$ égale à 1. Le corollaire 4.5 de [**35**] implique alors [2] que la valeur absolue v-adique de

$$\frac{\mathcal{D}_{b_1}^{\tau_1} \cdots \mathcal{D}_{b_{g-t}}^{\tau_{g-t}}}{\tau_1! \cdots \tau_{g-t}!} F_Q(0) = \frac{\mathcal{D}_{b_1}^{\tau_1} \cdots \mathcal{D}_{b_{g-t}}^{\tau_{g-t}}}{\tau_1! \cdots \tau_{g-t}!} F_{Q,v}(0)$$

est majorée par $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)^{-\ell} \max_{\boldsymbol{\lambda}} |q_{\boldsymbol{\lambda}}|_v$, où $(q_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}}$ est la famille de coordonnées de Q dans la base $(\mathbf{X}_1^{\boldsymbol{\lambda}_1} \cdots \mathbf{X}_n^{\boldsymbol{\lambda}_n})_{\boldsymbol{\lambda}}$ ($\boldsymbol{\lambda}$ parcourt l'ensemble des $(\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_n) \in \mathbb{N}^{N_1} \times \cdots \times \mathbb{N}^{N_n}$ tels que $|\boldsymbol{\lambda}_i| \leq c_{18} D_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$). La première partie de la proposition découle alors d'une estimation immédiate des coefficients $(q_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}}$ de Q, de l'égalité (52) et du fait que

$$\|\mathcal{J}\|_v \leq \max_{|\boldsymbol{\tau}|=\ell} \left| \prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu) \right|_v .$$

Le cas où $v|\widetilde{m}$ est une conséquence de l'égalité (52) et d'une estimation directe des valeurs absolues des dérivées $\frac{\mathcal{D}_{b_1}^{\tau_1} \cdots \mathcal{D}_{b_{g-t}}^{\tau_{g-t}}}{\tau_1! \cdots \tau_{g-t}!} F_Q(0)$.

□

7.3.7.2. *Estimations archimédiennes.* Dans le cas archimédien, on a l'estimation suivante, qui correspond à la proposition 4.13 de [**35**].

Proposition 7.3.18. *Il existe une constante $c_{36} \geq 1$ telle que pour toute place archimédienne $v \in \Sigma_{K'}$, on ait*

$$\|\mathcal{J}\|_v \leq c_{36}^{\ell + \log D_0 + D_1 + \cdots + D_n} \|s\|_{E,v} \left(\prod_{i=1}^{n} \max_{0 \leq j \leq N_i} \left| \frac{\varphi_{i,j}}{\varphi_{i,\varepsilon_i}}(mu_i) \right|_v^{c_{18} D_i} \right) \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ h \leq \ell}} \left| \frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(m) \right|_v \times \prod_{i=1}^{n} |A_{\varepsilon_i}^{(i)}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i), (1:0:\cdots:0))|_v^{-D_i}.$$

La constante c_{36} ne dépend que de ϕ et de g.

2. C'est ici qu'intervient l'hypothèse $t_{\mathcal{G}} \otimes \mathscr{O}_{K_v} = \{z \in t_G(K_v) \mid \|z\|_v \leq 1\}$ faite sur les normes $\|.\|_v$ pour $v \nmid \widetilde{m}$ (voir [**35**, page 243]).

Démonstration : La démonstration est analogue à celle de la seconde partie de la proposition 7.3.17, en remarquant que pour toute place archimédienne $v \in \Sigma_{K'}$, on a

$$\left|\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} \frac{P^{(\tau_0)}_{\lambda_0}}{\tau_0!}(m)\right|_v \leq \max_{\substack{\lambda_0\leq D_0\\ h\leq \ell}} \left|\frac{P^{(h)}_{\lambda_0}}{h!}(m)\right|_v |(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda}}|_{2,v}\sqrt{\operatorname{card}\Lambda}$$
$$\leq \max_{\substack{\lambda_0\leq D_0\\ h\leq \ell}} \left|\frac{P^{(h)}_{\lambda_0}}{h!}(m)\right|_v \|s\|_{\alpha,v}\left(D_0'(D_1')^{N_1}\cdots(D_n')^{N_n}\right)^{1/2},$$

et

$$\|\mathcal{J}\|_v \leq \operatorname{card}\{\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{N}^{g+1-t} \mid |\boldsymbol{\tau}| = \ell\} \max_{|\boldsymbol{\tau}|=\ell}\left|\prod_{i=1}^n \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i}\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{b}}F_s(m,mu)\right|_v$$
$$\leq \ell^{g+1-t}\max_{|\boldsymbol{\tau}|=\ell}\left|\prod_{i=1}^n \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i}\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{b}}F_s(m,mu)\right|_v.$$

□

7.3.7.3. *Estimation globale.* Nous allons maintenant appliquer les propositions 7.3.17 et 7.3.18 pour obtenir une estimation portant sur toutes les places de K' ne divisant pas v_0. La démonstration nécessite une minoration des tailles de sous-schémas formels $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v)$ due à Gaudron [**35**], qui est une conséquence d'un théorème de Raynaud (théorème 4, §7.5 de [**6**]).

Proposition 7.3.19. *Il existe une constante $c_{37} \geq 1$ (ne dépendant que de G, ϕ) telle que*

$$\sum_{\substack{v\in\Sigma_{K'}\\ v\nmid v_0}} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]}\log\|\mathcal{J}\|_v$$
$$\leq \sum_{\substack{v\in\Sigma_{K'}\\ v\nmid v_0}} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]}\left(\log\|s\|_{\alpha,v} + \max_{\substack{\lambda_0\leq D_0\\ h\leq (g+1)T}}\log\left|\frac{P^{(h)}_{\lambda_0}}{h!}(m)\right|_v\right) + c_{37}\frac{U}{DC_0}.$$

Démonstration : D'après les propositions 7.3.17 et 7.3.18, il existe une constante $c \geq 1$ telle que la quantité $\sum_{\substack{v\in\Sigma_{K'}\\ v\nmid v_0}} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]}\log\|\mathcal{J}\|_v$ soit majorée par

$$\sum_{\substack{v\in\Sigma_{K'}\\ v\nmid v_0}} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]}\left\{\log\|s\|_{\alpha,v} + \max_{\substack{\lambda_0\leq D_0\\ h\leq (g+1)T}}\log\left|\frac{P^{(h)}_{\lambda_0}}{h!}(m)\right|_v\right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^n D_i\left(c\log\max_{0\leq j\leq N_i}\left|\frac{\varphi_{i,j}}{\varphi_{i,\varepsilon_i}}(mu_i)\right|_v - \log|A^{(i)}_{\varepsilon_i}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i),(1:0:\cdots:0))|_v\right)\right\}$$
$$+ c\left(T + \log D_0' + \sum_{i=1}^n D_i\right) - \ell\sum_{v\in\Sigma'}\frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]}\log R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v),$$

où la dernière somme porte sur l'ensemble $\Sigma' \subset \Sigma_{K'}$ des places ultramétriques v de K' ne divisant ni v_0 ni $\widetilde{m}$. D'après [**35**, page 245], quitte à agrandir l'extension K', il existe un sous-ensemble fini $F_G \subset \Sigma_{K'}$, indépendant de H, tel que pour toute place $v \nmid \widetilde{m}$ de K', on ait :

- $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v) \geq p^{-1/(p-1)}$ si $v|p$ est dans F_G,
- $R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v) = 1$ si $v \in \Sigma' \setminus F_G$.

Notons F'_G l'ensemble des nombres premiers p tels qu'il existe une place $v \in F_G$ divisant p. Alors F'_G ne dépend ni de H ni de K' et on a

$$-\ell \sum_{v\in\Sigma'} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]} \log R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v) \leq \ell \sum_{v\in F_G\cap\Sigma', v|p} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]} \frac{1}{p-1}\log p = \ell \sum_{p\nmid \widetilde{m}, p\in F'_G} \frac{1}{p-1}\log p$$
$$\leq \ell \sum_{p\in F'_G} \frac{1}{p-1}\log p.$$

On en déduit que

$$-\ell \sum_{v\in\Sigma'} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]} \log R_{\mathcal{G},v}(\widehat{H}_v) \leq c'T,$$

où la constante $c' := (g+1)\operatorname{card} F'_G$ est indépendante de H et du corps K'. Par ailleurs, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $A^{(i)}_{\varepsilon_i}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i),(1:0:\cdots:0))$ appartient à K. La formule du produit et les propriétés de $A^{(i)}_{\varepsilon_i}$ rappelées au paragraphe 7.1 entraînent

$$\begin{aligned}
-\sum_{\substack{v\in\Sigma_{K'}\\ v\nmid v_0}} &\frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]} \log |A^{(i)}_{\varepsilon_i}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i),(1:0:\cdots:0))|_v \\
&= \sum_{\substack{v\in\Sigma_{K'}\\ v| v_0}} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]} \log |A^{(i)}_{\varepsilon_i}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i),(1:0:\cdots:0))|_v \\
&= \frac{[K_{v_0}:\mathbb{Q}_{v_0}]}{[K:\mathbb{Q}]} \log |A^{(i)}_{\varepsilon_i}(\Theta_{i,\varepsilon_i}(mu_i),(1:0:\cdots:0))|_{v_0} \\
&\leq \frac{[K_{v_0}:\mathbb{Q}_{v_0}]}{[K:\mathbb{Q}]} \log\left(e^{c_{18}} \max_j \left|\frac{\varphi_{i,j}}{\varphi_{i,\varepsilon_i}}(mu_i)\right|_{v_0}^{c_{18}}\right) \\
&\leq \frac{[K_{v_0}:\mathbb{Q}_{v_0}]}{[K:\mathbb{Q}]} c_{18} \quad \text{(par choix de } \varepsilon_i).
\end{aligned}$$

De même, la formule du produit et le choix de ε_i permettent d'écrire

$$\sum_{\substack{v\in\Sigma_{K'}\\ v\nmid v_0}} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]} \log \max_{0\leq j\leq N_i} \left|\frac{\varphi_{i,j}}{\varphi_{i,\varepsilon_i}}(mu_i)\right|_v = \sum_{v\in\Sigma_{K'}} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]} \log \max_{0\leq j\leq N_i} |\varphi_{i,j}(mu_i)|_v$$
$$= h(m\mathbf{p}_i).$$

Finalement, on obtient l'inégalité

$$\sum_{\substack{v\in\Sigma_{K'}\\ v\nmid v_0}} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]} \log \|\mathcal{J}\|_v \leq \sum_{\substack{v\in\Sigma_{K'}\\ v\nmid v_0}} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]} \left(\log\|s\|_{\alpha,v} + \max_{\substack{\lambda_0\leq D_0\\ h\leq (g+1)T}} \log\left|\frac{P^{(h)}_{\lambda_0}}{h!}(m)\right|_v\right)$$
$$+ c_{37}\left(T + \log D'_0 + \sum_{i=1}^n D_i \max_{0\leq k\leq (g+1)S}\{h(k\mathbf{p}_i)\}\right),$$

et on en déduit la majoration voulue en appliquant les lemmes 7.3.5 et 7.3.6 selon que la place v_0 est archimédienne ou non.

□

REMARQUE 7.3.20. Par le théorème de décomposition de Chevalley, G est une extension de son sous-groupe algébrique linéaire maximal par une variété abélienne A. D'après [**35**, page 245], après une éventuelle extension finie du corps K', le cardinal de l'ensemble F_G de la démonstration est inférieur à celui de

$$\mathcal{E}_A = \{v \in \Sigma_{K'} \,|A \times_K \operatorname{Spec} K' \text{ a mauvaise réduction en } v|p \text{ ou } \mathrm{e}(v) \geq p-1\},$$

où $\mathrm{e}(v)$ désigne l'indice de ramification de K'_v sur $\mathbb{Q}_p$. D'après le théorème 4.7 de [**35**], pour toute sous-variété abélienne A' de A, on a $\mathcal{E}_{A'} \subset \mathcal{E}_A$. On en déduit que pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G, $\operatorname{card} F'_{G'} \leq \operatorname{card} \mathcal{E}_{A'} \leq \operatorname{card} \mathcal{E}_A$.

Afin de contrôler la hauteur de $\mathcal{J}$, nous allons maintenant majorer $\|\mathcal{J}\|_v$ pour toute place v de K' au dessus de v_0. Afin d'aboutir à une contradiction, cette étape nécessite une étude minutieuse et fait l'objet du paragraphe suivant.

7.3.8. Extrapolation. Considérons une place quelconque de K' au dessus de v_0, place que l'on note encore v_0. Nous cherchons ici à majorer la quantité

$$\left|\prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)\right|_{v_0}$$

pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g+1-t}$ tel que $|\boldsymbol{\tau}| = \ell$. Remarquons que si $(m, \boldsymbol{\tau})$ appartient à $\boldsymbol{\Upsilon}$, alors par définition de la norme $\|.\|_{\alpha,v_0}$, on a

$$\begin{aligned}\left|\prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)\right|_{v_0} &\leq \|s\|_{\alpha,v_0} \prod_{i=1}^{n} |\varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)|_{v_0}^{-D_i} \\ &\leq \|s\|_{\alpha,v_0} \prod_{i=1}^{n} \exp(c_{19} D_i (1 + m\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}).\end{aligned}$$

Nous allons démontrer une majoration similaire dans le cas général. La méthode employée est classique en théorie des formes linéaires de logarithmes (et remonte à Baker) ; elle consiste en une extrapolation sur les points. Nous distinguerons les cas où la place v_0 est ultramétrique ou archimédienne, et nous utiliserons un lemme d'interpolation adapté à chacune de ces situations. Soit $\widetilde{u} \in V \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ un vecteur tel que $d(u, V) = \|u - \widetilde{u}\|_{v_0}$.

7.3.8.1. *Cas archimédien.* Supposons que la place v_0 est archimédienne. Sans perte de généralité, nous supposons également que la base $\mathbf{w}$ de $W \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ définie à la page 123 est orthonormée pour $\|.\|_{v_0}$. Nous aurons besoin du lemme de comparaison suivant.

Lemme 7.3.21. *Il existe une constante $c_{38} \geq 1$ (ne dépendant que de g, ϕ, $\|.\|_{v_0}$) telle que pour tout entier naturel $k \leq (g+1)S$ et pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g+1-t}$ tel que $|\boldsymbol{\tau}| \leq 2(g+1)T$, on ait*

$$\left|\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(k, ku) - \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(k, k\widetilde{u})\right|_{v_0} \leq \exp\left(\frac{c_{38} U}{C_0}\right) d(u, V) \|s\|_{\alpha,v_0} \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ h \leq \ell+1}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(k)\right|_{v_0}.$$

Démonstration : Considérons l'application

$$f : [0,1] \to \mathbb{C}_{v_0},\ \nu \mapsto \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(k, ku + \nu k(\widetilde{u} - u)).$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|f(1) - f(0)|_{v_0} \leq \sup_{\nu \in [0,1]} |f'(\nu)|_{v_0}$. Soit $\mathbf{e}' = (e_0, e'_1, \ldots, e'_g)$ une base orthonormée de $t_{G_0 \times G}(\mathbb{C}_{v_0})$. En posant

$$u = \sum_{j=1}^{g} x_j e'_j \quad \text{et} \quad \widetilde{u} = \sum_{j=1}^{g} \widetilde{x}_j e'_j,$$

on a

$$f'(\nu) = \sum_{j=1}^{g} k(\widetilde{x}_j - x_j) \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \frac{\partial}{\partial z_j} \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(k, ku + \nu k(\widetilde{u} - u)).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|f'(\nu)|_{v_0} \leq \sqrt{g} k \|\widetilde{u} - u\|_{v_0} \max_{1 \leq j \leq g} \left|\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \frac{\partial}{\partial z_j} \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(k, ku + \nu k(\widetilde{u} - u))\right|_{v_0}.$$

En reprenant les arguments des lemmes 7.3.11 et 7.3.12, on en déduit qu'il existe une constante c (qui ne dépend que de g et de ϕ) telle que

$$|f'(\nu)|_{v_0} \leq c^T kd(u,V) \max_{|\boldsymbol{\sigma}|=\ell+1} \left|\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}!}\mathcal{D}^{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{e}'} F_s(k, ku+\nu k(\widetilde{u}-u))\right|_{v_0},$$

puis

$$|f'(\nu)|_{v_0} \leq c^T kd(u,V)\|s\|_{\alpha,v_0} D_0' \prod_{i=1}^n \exp(cD_i(1+k\|u_i+\nu(\widetilde{u}_i-u_i)\|_{v_0})^{\rho_i}) \max_{\substack{\lambda_0\leq D_0\\ h\leq \ell+1}} \left|\frac{P^{(h)}_{\lambda_0}}{h!}(k)\right|_{v_0}.$$

En remarquant que $\nu\|u_i-\widetilde{u}_i\|_{v_0} \leq d(u,V)\leq 1/k$, on en déduit qu'il existe une constante c' telle que

$$|f'(\nu)|_{v_0} \leq c^T kd(u,V)\|s\|_{\alpha,v_0} D_0' \prod_{i=1}^n \exp(c'D_i(1+k\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}) \max_{\substack{\lambda_0\leq D_0\\ h\leq \ell+1}} \left|\frac{P^{(h)}_{\lambda_0}}{h!}(k)\right|_{v_0}.$$

On en déduit le résultat voulu en appliquant le lemme 7.3.5.

□

Pour un nombre réel positif a et une fonction analytique f définie sur le disque fermé $\overline{D}(0,a)=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leq a\}$, on note $|f|_{v_0,a}=\sup\{|f(z)|_{v_0} \mid z\in\overline{D}(0,a)\}$. Nous aurons besoin du lemme d'interpolation suivant, que l'on trouve par exemple dans [**66**].

Lemme 7.3.22 (Proposition 4.2 de [**66**]). *Soient T_1, S_1 des entiers strictement positifs et soient $R\geq r\geq 2S_1$ des nombres réels. Pour toute fonction f analytique dans le disque $\overline{D}(0,R)$, on a*

$$|f|_{v_0,r} \leq 2|f|_{v_0,R}\left(\frac{2r}{R}\right)^{T_1S_1} + 5\left(\frac{9r}{S_1}\right)^{T_1S_1} \max_{\substack{t\in\mathbb{N}, t\leq S_1\\ h\leq T_1}} \left|\frac{f^{(h)}}{h!}(t)\right|_{v_0}.$$

Signalons que des lemmes d'interpolations plus précis ont été démontrés depuis l'article [**66**] (voir par exemple la proposition 2.1 de [**7**]). Comme nous n'expliciterons pas les constantes qui interviendront dans le résultat final, nous nous contenterons de la version (plus simple) présentée ci-dessus.

Proposition 7.3.23. *Il existe une constante $c_{39}\geq 1$ (ne dépendant que de g, ϕ, $\|.\|_{v_0}$) telle que si $C_0\geq c_{39}$, alors pour tout $\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{N}^{g+1-t}$ tel que $|\boldsymbol{\tau}|=\ell$, on a*

$$\left|\prod_{i=1}^n \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i}\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{w}}F_s(m,mu)\right|_{v_0}$$
$$\leq e^{-U}\|s\|_{\alpha,v_0}\max\left\{\left|\frac{P^{(h)}_{\lambda_0}}{h!}(z)\right|_{v_0} \mid h\leq 2(g+1)T,\ \lambda_0\leq D_0,\ |z|\leq 2(g+1)S\mathfrak{e}\right\}.$$

Démonstration : Considérons la fonction entière définie par $f(z)=\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{w}}F_s(z,z\widetilde{u})$. Nous allons appliquer le lemme 7.3.22 à f avec $S_1=S_0$, $T_1=(g+1)T$, $r=(g+1)S$ et $R=2r\mathfrak{e}$. Notons $\widetilde{\mathbf{x}}=(1,\widetilde{x}_1,\dots,\widetilde{x}_{g-t})$ les coordonnées de $(1,\widetilde{u})$ dans la base $\mathbf{w}$:

$$(1,\widetilde{u})=e_0+\sum_{j=1}^n \widetilde{x}_j w_j.$$

Pour tout entier $h\geq 0$ et pour tout $z\in t_{G_0\times G}(\mathbb{C}_{v_0})$, on a

$$\frac{1}{h!}f^{(h)}(z)=\sum_{\substack{|\mathbf{j}|=h\\ \mathbf{j}\in\mathbb{N}^{g+1-t}}}\binom{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}}{\mathbf{j}}\widetilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{j}}\frac{1}{(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j})!}\mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}}_{\mathbf{w}}F_s(z,z\widetilde{u}),$$

où $\widetilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{j}} = \widetilde{x}_1^{j_1} \cdots \widetilde{x}_{g-t}^{j_{g-t}}$. Comme $d(u,V) = \|u - \widetilde{u}\|_{v_0} \leq 1$ et que la base $\mathbf{w}$ est orthonormée pour la place v_0, on en déduit qu'il existe une constante c (ne dépendant que de g) telle que pour tout entier $0 \leq h \leq (g+1)T$, on ait

$$\left| \sum_{\substack{|\mathbf{j}|=h \\ \mathbf{j}\in\mathbb{N}^{g+1-t}}} \binom{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}}{\mathbf{j}} \widetilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{j}} \right|_{v_0} \leq \max\{1, \|\widetilde{u}\|_{v_0}\}^h h^{g+1-t} \max_{|\mathbf{j}|=h} \left| \binom{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}}{\mathbf{j}} \right|_{v_0} \leq c^T (1 + \|u\|_{v_0})^{(g+1)T}.$$

On en déduit qu'il existe une constante c' telle que pour tout entier $0 \leq h \leq (g+1)T$ et pour tout $z \in \mathbb{C}_{v_0}$, on ait

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(h)}}{h!}(z) \right|_{v_0} &\leq c^T (1 + \|u\|_{v_0})^{(g+1)T} \max_{|\mathbf{j}|=h} \left| \frac{1}{(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j})!} \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}} F_s(z, z\widetilde{u}) \right|_{v_0} \\ &\leq \exp\left(\frac{c'U}{C_0}\right) \max_{|\mathbf{j}|=h} \left| \frac{1}{(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j})!} \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}} F_s(z, z\widetilde{u}) \right|_{v_0}. \end{aligned} \tag{53}$$

Soient h et k des entiers naturels tels que $h \leq (g+1)T$ et $k \leq S_0$. D'après le lemme de comparaison 7.3.21, on a

$$\begin{aligned} \max_{|\mathbf{j}|=h} \left| \frac{1}{(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j})!} \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}} F_s(k, k\widetilde{u}) \right|_{v_0} \leq & d(u,V) \|s\|_{\alpha,v_0} \exp\left(\frac{c_{38}U}{C_0}\right) \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ h \leq 2(g+1)T}} \left| \frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(k) \right|_{v_0} \\ & + \max_{|\mathbf{j}|=h} \left| \frac{1}{(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j})!} \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}} F_s(k, ku) \right|_{v_0}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, pour tout $\mathbf{j}$ tel que $|\mathbf{j}| = h$ et pour tout $k \leq S_0$, le couple $(k, \boldsymbol{\tau}+\mathbf{j})$ appartient à $\boldsymbol{\Upsilon}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \max_{|\mathbf{j}|=h} \left| \frac{1}{(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j})!} \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}} F_s(k, ku) \right|_{v_0} \leq \alpha^{-1} \|s\|_{\alpha,v_0} &= \exp(-U(g+1+\sqrt{C_0})) \|s\|_{\alpha,v_0} \\ &\leq \exp(-U(3(g+1)/4+\sqrt{C_0})) \|s\|_{\alpha,v_0}. \end{aligned}$$

L'inégalité (53) entraîne alors

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f^{(h)}}{h!}(k) \right|_{v_0} \\ &\leq \exp\left(\frac{c'U}{C_0}\right) \|s\|_{\alpha,v_0} \left(d(u,V) \exp\left(\frac{c_{38}U}{C_0}\right) \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ h \leq 2(g+1)T}} \left| \frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(k) \right|_{v_0} + e^{-U(3(g+1)/4+\sqrt{C_0})} \right). \end{aligned}$$

Pour un choix convenable de c et de c', les lemmes 7.3.5 et 7.3.12 entraînent de plus

$$\begin{aligned} 2|f|_{v_0,R} &\leq c^T D_0' \prod_{i=1}^n \exp(cD_i(1+R\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}) \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ |z| \leq R}} \left| \frac{P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}}{\tau_0!}(z) \right|_{v_0} \|s\|_{\alpha,v_0} \\ &\leq \exp\left(\frac{c'U}{C_0}\right) \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ |z| \leq R}} \left| \frac{P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}}{\tau_0!}(z) \right|_{v_0} \|s\|_{\alpha,v_0}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si C_0 est assez grand, on a

$$5\left(\frac{9r}{S_1}\right)^{T_1 S_1} = 5\left(\frac{9(g+1)S}{S_0}\right)^{(g+1)TS_0} \leq \exp\big((g+1)\log(18(g+1)C_0^2)U\big) \leq e^{\sqrt{C_0}U}.$$

et $(2r/R)^{T_1S_1} = (1/\mathfrak{e})^{(g+1)TS_0} \leq (1/\mathfrak{e})^{3(g+1)\widetilde{T}S_0/4} = \exp(-3(g+1)U/4)$. En appliquant le lemme 7.3.22, on en déduit que

$$\begin{aligned}|f|_{v_0,r} \leq & e^{-3(g+1)U/4} \exp\left(\frac{c'U}{C_0}\right) \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ h \leq 2(g+1)T \\ |z| \leq R}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(z)\right|_{v_0} \|s\|_{\alpha,v_0} \\ & + \exp(\sqrt{C_0}U) \exp\left(\frac{c'U}{C_0}\right) \|s\|_{\alpha,v_0} \\ & \times \left[d(u,V) \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ h \leq 2(g+1)T \\ k \leq S_0}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(k)\right|_{v_0} \exp\left(\frac{c_{38}U}{C_0}\right) + e^{-U(3(g+1)/4+\sqrt{C_0})}\right].\end{aligned}$$

Si C_0 est suffisamment grand, l'hypothèse 2 page 128 entraîne que

$$d(u,V) \leq \exp(-(3(g+1)/4 + \frac{c_{38}}{C_0} + \sqrt{C_0})U),$$

et on en déduit que

$$|f(m)|_{v_0} \leq |f|_{v_0,r} \leq 3\exp(-U(3(g+1)/4 - c'/C_0)) \times \max_{\substack{\lambda_0 \leq D_0 \\ h \leq 2(g+1)T \\ |z| \leq R}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(z)\right|_{v_0} \|s\|_{\alpha,v_0}.$$

En appliquant à nouveau le lemme 7.3.21, on en déduit qu'il existe une constante c'' telle que

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)\right|_{v_0} & \leq |f(m)|_{v_0} + d(u,V) \exp\left(\frac{c_{38}U}{C_0}\right) \|s\|_{\alpha,v_0} \max_{\substack{|z| \leq R \\ \lambda_0 \leq D_0 \\ h \leq 2(g+1)T}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(z)\right|_{v_0} \\ & \leq \exp(-U(3(g+1)/4 - c''/C_0)) \times \max_{\substack{|z| \leq R \\ \lambda_0 \leq D_0 \\ h \leq 2(g+1)T}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(z)\right|_{v_0} \|s\|_{\alpha,v_0}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, quitte à agrandir c'', le lemme 7.3.5 entraîne que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$|\varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)|_{v_0}^{-D_i} \leq \exp(c_{19}D_i(1 + R\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}) \leq e^{c''U/C_0}.$$

Si C_0 est suffisamment grand, on obtient bien le résultat recherché.

□

7.3.8.2. *Cas ultramétrique.* Supposons que la place v_0 est finie et soit $i \in \{1, \ldots, n\}$. Rappelons que $(\varphi_{i,0}(0), \ldots, \varphi_{i,N_i}(0)) = (1, 0, \ldots, 0)$ et que pour tout $0 \leq j \leq N_i$, il existe une suite $(a_{j,\mathbf{n}})_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{g_i}}$ d'éléments de $\mathscr{O}_{K_{v_0}}$ telle que

$$\forall \mathbf{z} \in D_i(0, r_{p_0}), \quad \varphi_{i,j}(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^{g_i}} \frac{a_{j,\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}\mathbf{z}^{\mathbf{n}}.$$

Soit $\mathbf{z} \in D_i(0, r_{p_0})$. Comme $a_{0,\mathbf{0}} = 1$ et que $|\mathbf{z}^{\mathbf{n}}/\mathbf{n}!|_{v_0} < 1$ pour tout $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ (remarquons que $r_{p_0}^{|\mathbf{n}|} \leq |\mathbf{n}!|_{v_0}$ pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^g$), on a $|\varphi_{i,0}(\mathbf{z})|_{v_0} = 1$. De la même façon on remarque que $|\varphi_{i,j}(\mathbf{z})|_{v_0} < 1$ si $j \neq 0$. En particulier $\max_{0 \leq j \leq N_i} |\varphi_{i,j}(z)|_{v_0} = |\varphi_{i,0}(z)|_{v_0}$ pour tout $z \in D_i(0, r_{p_0})$ et $|\varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)|_{v_0} = |\varphi_{i,0}(mu_i)|_{v_0} = 1$. On a ainsi

$$\left|\prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)\right|_{v_0} = \left|\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu)\right|_{v_0}. \tag{54}$$

Nous allons maintenant reprendre les arguments des lemmes 7.3.11 et 7.3.12 afin d'établir un lemme de comparaison analogue au lemme 7.3.21. Pour tous $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1' \in D(0, r_{p_0})$ et tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^g \setminus \{0\}$, on a

$$|\mathbf{z}_1^{\mathbf{n}} - \mathbf{z}_1'^{\mathbf{n}}|_{v_0} \leq \|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_1'\|_{v_0} \max\{\|\mathbf{z}_1\|_{v_0}, \|\mathbf{z}_1'\|_{v_0}\}^{|\mathbf{n}|-1},$$

d'où
$$\left|\frac{\mathbf{z}_1^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}-\frac{\mathbf{z}_1'^{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}!}\right|_{v_0}\leq\frac{|\mathbf{z}_1^{\mathbf{n}}-\mathbf{z}_1'^{\mathbf{n}}|_{v_0}}{r_{p_0}^{|\mathbf{n}|}}\leq\|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_1'\|_{v_0}r_{p_0}^{-1}.$$
La fonction F_s s'écrit $F_s=\sum_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda}p_{\boldsymbol{\lambda}}F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}$, où
$$\Lambda=\{\boldsymbol{\lambda}=(\boldsymbol{\lambda}_i)_{0\leq i\leq n}\in\mathbb{N}\times\prod_{i=1}^{n}\mathbb{N}^{N_i+1}\mid\lambda_0\leq D_0,\ \boldsymbol{\lambda}_i=(\lambda_{i,j})_{0\leq j\leq N_i},\ |\boldsymbol{\lambda}_i|=D_i\}$$
et $F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}=P_{\lambda_0}\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{N_i}\varphi_{i,j}^{\lambda_{i,j}}$ pour tout $\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda$. Soit $\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_0,\boldsymbol{\sigma}_1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^g$. Par choix de la base $\mathbf{e}$ (définie à la page 116), pour tout $\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda$, il existe une suite $(a_{\mathbf{n},\boldsymbol{\lambda}})_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^g}$ d'éléments de $\mathscr{O}_{K_{v_0}}$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on ait
$$\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}!}\mathcal{D}^{\boldsymbol{\sigma}}_{(e_0,\mathbf{e})}F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}(k,k\mathbf{z}_1)-\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}!}\mathcal{D}^{\boldsymbol{\sigma}}_{(e_0,\mathbf{e})}F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}(k,k\mathbf{z}_1')=\frac{P_{\lambda_0}^{(\sigma_0)}}{\sigma_0!}(k)\sum_{\mathbf{n}}\frac{a_{\mathbf{n},\boldsymbol{\lambda}}}{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\sigma}_1)!}(\mathbf{z}_1^{\mathbf{n}-\boldsymbol{\sigma}_1}-\mathbf{z}_1'^{\mathbf{n}-\boldsymbol{\sigma}_1}),$$
où la somme est prise sur l'ensemble des $\mathbf{n}=(n_1,\ldots,n_j)\in\mathbb{N}^g$ tels que $n_j\geq\sigma_{1,j}$ pour tout $1\leq j\leq g$ (en posant $\boldsymbol{\sigma}_1=(\sigma_{1,1},\ldots,\sigma_{1,g})$). En raisonnant comme dans la démonstration du lemme 7.3.11, on montre que pour tout $\mathbf{h}=(h_0,\mathbf{h}_1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^{g-t}$, en déduit que la quantité
$$\left|\frac{1}{\mathbf{h}!}\mathcal{D}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{w}}F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}(k,k\mathbf{z}_1)-\frac{1}{\mathbf{h}!}\mathcal{D}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{w}}F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}(k,k\mathbf{z}_1')\right|_{v_0}$$
est majorée par
$$\max\{\left|\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}!}\mathcal{D}^{\boldsymbol{\sigma}}_{(e_0,\mathbf{e})}F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}(k,k\mathbf{z}_1)-\frac{1}{\boldsymbol{\sigma}!}\mathcal{D}^{\boldsymbol{\sigma}}_{(e_0,\mathbf{e})}F_{s_{\boldsymbol{\lambda}}}(k,k\mathbf{z}_1')\right|_{v_0}\mid\boldsymbol{\sigma}=(h_0,\boldsymbol{\sigma}_1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^g,\ |\boldsymbol{\sigma}_1|=|\mathbf{h}_1|\}.$$
On en déduit le lemme de comparaison suivant.

LEMME 7.3.24. *Soient $\mathbf{z}_1,\mathbf{z}_1'\in D(0,r_{p_0})$. Alors pour tout couple $\mathbf{h}=(h_0,\mathbf{h}_1)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^{g-t}$ et pour tout entier $k\in\mathbb{N}$, on a l'inégalité*
$$\left|\frac{1}{\mathbf{h}!}\mathcal{D}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{w}}F_s(k,k\mathbf{z}_1)-\frac{1}{\mathbf{h}!}\mathcal{D}^{\mathbf{h}}_{\mathbf{w}}F_s(k,k\mathbf{z}_1')\right|_{v_0}\leq r_{p_0}^{-1}\max_{\lambda_0\leq D_0}\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h_0)}}{h_0!}(k)\right|_{v_0}\|s\|_{E,v_0}\|\mathbf{z}_1-\mathbf{z}_1'\|_{v_0}.$$

Le lemme suivant est un corollaire d'un théorème de Robba [**69**].

LEMME 7.3.25. *Soit $R\geq 1$ un nombre réel et soient $S_1\geq 2$, $T_1\geq 1$ deux nombres entiers. Soit*
$$f\colon\{z\in\mathbb{C}_{v_0}\mid|z|_{v_0}\leq R\}\to\mathbb{C}_{v_0}$$
une fonction analytique. Alors pour tout $\nu\in\mathbb{Z}_{p_0}$, on a
$$|f(\nu)|_{v_0}\leq\max\left\{\left(\frac{1}{R}\right)^{T_1S_1}|f|_{v_0,R},\gamma\max_{\substack{h,k\in\mathbb{N}\\h<T_1,k<S_1}}\left|\frac{f^{(h)}(k)}{h!}\right|_{v_0}\right\},$$
où
$$\gamma=p_0^{(T_1-1)[\log(S_1-1)/\log p_0]}$$
et
$$|f|_{v_0,R}=\sup\{|f(z)|_{v_0}\mid z\in\mathbb{C}_{v_0},\ |z|_{v_0}\leq R\}.$$

Démonstration : Le corps $\mathbb{Q}_{p_0}$ est localement compact de type $(p_0,1/p_0)$ au sens de [**69**, § 2.6]. Par ailleurs, la suite des entiers naturels est très bien répartie dans $\mathbb{Z}_{p_0}=\{\nu\in\mathbb{Q}_{p_0}\mid|\nu|_{p_0}\leq 1\}$ au sens d'Amice (voir [**1**, § 2.1 et exemple 2.3.1] et [**69**, § 5.4]) : pour tout $\nu\in\mathbb{Z}_{p_0}$ et pour tous entiers naturels h,k, on a l'encadrement
$$\left[\frac{h}{p_0^k}\right]\leq\mathrm{card}\{i\in\mathbb{N},\ i\leq h\mid|i-\nu|_{p_0}\leq p_0^{-k}\}\leq\left[\frac{h-1}{p_0^k}\right]+1.\tag{55}$$
La conclusion du lemme 7.3.25 est triviale si $R=1$. Dans la suite, nous supposons que $R>1$. Le lemme correspond à la remarque iii) page 276 de [**69**] appliquée à $n=0$, $r=1$, $h=S_1$, $k=T_1$, $K=\mathbb{Q}_{p_0}$, et à la suite $u_i=i$ des entiers naturels. Il est important de signaler que le

théorème page 275 de [**69**] reste valable en remplaçant l'hypothèse « $f\colon K \to K$ analytique » par « $f\colon \widetilde{K} \to \widetilde{K}$ analytique », où $\widetilde{K}$ désigne un corps valué contenant K. En effet, ce théorème repose sur celui page 270 (qui n'impose pas d'hypothèse sur K), et sur les majorations des quantités $\varepsilon_\gamma(f)$ et $c'_{\gamma,z}$ du § 5.4. Le point est que $c'_{\gamma,z}$ ne dépend pas de f, et que l'on peut donc utiliser l'inégalité (5.4.10) page 275 du moment que K est localement compact et que la suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est très bien répartie dans une boule de K. La majoration de $\varepsilon_\gamma(f)$ est quant à elle inchangée si l'on considère une extension valuée du corps K. Nous allons maintenant détailler le raisonnement de Robba ; pour simplifier, nous nous concentrerons sur le cas particulier qui nous intéresse.

Notons Γ l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à S_1. On a

$$\delta := \min\{|i-j|_{v_0} \mid i,j \in \Gamma,\ i \neq j\} = p_0^{-[\log(S_1-1)/\log p_0]}.$$

Considérons le polynôme $P(X) = \prod_{j\in\Gamma}(X-j)^{T_1}$ et pour tout $i \in \Gamma$, posons $P_i(X) = P(X)/(X-i)$. Pour $i \in \Gamma$, on note $\delta_i = \min\{|i-j|_{p_0} \mid j \in \Gamma,\ j \neq i\}$. Soit $\nu \in \mathbb{Z}_{p_0}$ et soit $\omega \in \Gamma$ tel que $|\nu-\omega|_{v_0} = \min\{|\nu-j|_{p_0} \mid j \in \Gamma\}$. On pose alors $\delta_\nu = \max\{|\nu-\omega|_{p_0}, \delta_\omega\}$. En suivant Robba [**69**, page 269], on note, pour tout $i \in \Gamma$ et pour tout $\nu \in \mathbb{Z}_{p_0}$,

$$c'_{i,\nu} = |P_i|_{v_0,\delta_\nu}/\varepsilon_i(P_i).$$

Si $g\colon \mathbb{C}_{v_0} \to \mathbb{C}_{v_0}$ est une fonction analytique sur $\overline{D}(0,R) := \{z \in \mathbb{C}_{v_0} \mid |z|_{v_0} \leq R\}$ et si $i \in \Gamma$, on note également

$$\varepsilon_i(g) = \max\left\{\left|\frac{g^{(h)}(i)}{h!}\right|_{v_0} \delta_i^h \mid h \in \mathbb{N}, h < T_1\right\}.$$

Soit $\nu \in \mathbb{Z}_{p_0}$. D'après le théorème page 270 de [**69**] (appliqué à $r=1$ et $m(i) = T_1$ pour tout $i \in \Gamma$), on a :

$$\text{(56)}\qquad \begin{cases} \text{ou bien } \ |f|_{v_0,1} \leq R^{-S_1T_1}|f|_{v_0,R}, \\ \text{ou } \ |f(\nu)|_{v_0} \leq \max_{i\in\Gamma} c'_{i,\nu}\varepsilon_i(f) \end{cases}$$

(voir aussi les remarques du paragraphe 1.1.2 page 254 de [**69**]). L'encadrement (55) entraîne que pour tout $\nu \in \mathbb{Z}_{p_0}$, la quantité δ_ν vaut δ ou $p_0\delta$ (voir [**69**, (5.4.2)]). Posons

$$\varepsilon = \max_{\substack{h,k\in\mathbb{N} \\ h<T_1, k<S_1}} \left|\frac{f^{(h)}(k)}{h!}\right|_{v_0}.$$

Soit $i \in \Gamma$. Il découle immédiatement de la définition de $\varepsilon_i(f)$ que

$$\begin{cases} \varepsilon_i(f) \leq \varepsilon & \text{si } \delta_i = \delta, \\ \varepsilon_i(f) \leq \varepsilon p_0^{T_1-1} & \text{si } \delta_i = p_0\delta. \end{cases}$$

De plus, les inégalités (5.4.10) et la première partie de la remarque iii) de [**69**, pages 275-276] impliquent que pour tout $\nu \in \mathbb{Z}_{p_0}$ et tout $i \in \Gamma$, on a

$$\begin{cases} c'_{i,\nu} \leq \delta^{-(T_1-1)} & \text{si } \delta_i = \delta, \\ c'_{i,\nu} \leq \delta^{-(T_1-1)}p_0^{-(T_1-1)} & \text{si } \delta_i = p_0\delta \end{cases}$$

(remarquons que par définition, $c_{i,\nu}$ ne dépend que de S_1, T_1, p_0). On en déduit que

$$\text{(57)}\qquad c'_{i,\nu}\varepsilon_i(f) \leq \delta^{-(T_1-1)}\varepsilon$$

pour tout $i \in \Gamma$ et pour tout $\nu \in \mathbb{Z}_{p_0}$. Soit $\nu \in \mathbb{Z}_{p_0}$. Comme $|f(\nu)|_{v_0} \leq |f|_{v_0,1}$, les inégalités (56) et (57) entraînent que

$$|f(\nu)|_{v_0} \leq \max\left\{R^{-S_1T_1}|f|_{v_0,R}, \delta^{-(T_1-1)}\varepsilon\right\},$$

ce qui achève la preuve.

□

Rappelons que $\widetilde{u}$ désigne un vecteur de $V\otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ tel que $\|u-\widetilde{u}\|_{v_0}=d(u,V)$ et que la base $\mathbf{w}$ de $W\otimes_K\mathbb{C}_{v_0}$ est formée de vecteurs de norme 1 (voir page 123). D'après la proposition 1.1.5 page 28, nous pouvons supposer sans perte de généralité que cette base vérifie :

$$\forall\ (x_1,\ldots,x_{g-t})\in\mathbb{C}_{v_0}^{g-t},\quad \|\sum_{j=1}^{g-t}x_jw_j\|_{v_0}>r_{p_0}\max_{1\leq j\leq g-t}|x_j|_{v_0}.$$

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires à l'extrapolation dans le cas ultramétrique, qui conduit au résultat suivant. Rappelons que l'on a supposé que $\|u\|_{v_0}<r_{p_0}$ et que $\mathfrak{R}$ est un nombre réel de l'intervalle $]1,r_{p_0}/\|u\|_{v_0}[$.

Proposition 7.3.26. *Il existe une constante $c_{40}\geq 1$ (ne dépendant que de g et de v_0) telle que si $C_0\geq c_{40}$, alors*

$$\begin{aligned}&\left|\prod_{i=1}^{n}\varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i}\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}F_s(m,mu)\right|_{v_0}\\&\qquad\leq e^{-U}\|s\|_{v_0,\alpha}\times\max\left\{\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(z)\right|_{v_0}\ \middle|\ h\leq 2(g+1)T,\ \lambda_0\leq D_0,\ |z|_{v_0}\leq\mathfrak{R}\right\}.\end{aligned}$$

Démonstration : D'après (54), on a

$$\left|\prod_{i=1}^{n}\varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i}\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}F_s(m,mu)\right|_{v_0}=\left|\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}F_s(m,mu)\right|_{v_0}.$$

Considérons la fonction

$$f\colon\nu\in\{\nu\in\mathbb{C}_{v_0}\mid|\nu|_{v_0}<r_{p_0}/\|u\|_{v_0}\}\mapsto\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}}F_s(\nu,\nu\widetilde{u}).$$

Remarquons que $d(u,V)=\|u-\widetilde{u}\|_{v_0}=\inf\{\|u-\mathbf{z}\|_{v_0}\mid\mathbf{z}\in V\otimes_K\mathbb{C}_{v_0}\}\leq\|u\|_{v_0}$. Si $d(u,V)=\|u\|_{v_0}$, on peut poser $\widetilde{u}=0$. Sinon, on a $d(u,V)<\|u\|_{v_0}$, et donc $\|\widetilde{u}\|_{v_0}=\|u\|_{v_0}$. Dans tous les cas, on en déduit que la fonction f est analytique sur $\{\nu\in\mathbb{C}_{v_0}\mid|\nu|_{v_0}<r_{p_0}/\|u\|_{v_0}\}$. Notons $\widetilde{\mathbf{x}}=(1,\widetilde{x}_1,\ldots,\widetilde{x}_{g-t})$ les coordonnées de $(1,\widetilde{u})$ dans la base $\mathbf{w}$:

$$(1,\widetilde{u})=e_0+\sum_{j=1}^{n}\widetilde{x}_jw_j.$$

D'après l'hypothèse faite sur $\mathbf{w}$, on a $\max_{1\leq j\leq g-t}|\widetilde{x}_j|_{v_0}<r_{p_0}^{-1}\|\widetilde{u}\|_{v_0}<1$. Pour tous entiers $h,k\geq 0$, on a

$$\frac{1}{h!}f^{(h)}(k)=\sum_{\substack{|\mathbf{j}|=h\\ \mathbf{j}\in\mathbb{N}^{g+1-t}}}\binom{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}}{\mathbf{j}}\widetilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{j}}\frac{1}{(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j})!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}}F_s(k,k\widetilde{u}),$$

où $\widetilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{j}}=\widetilde{x}_1^{j_1}\cdots\widetilde{x}_{g-t}^{j_{g-t}}$. On en déduit que pour tout $k\leq S_0$ et pour tout $h\leq(g+1)T$, on a

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{h!}f^{(h)}(k)\right|_{v_0}&\leq\max_{|\mathbf{j}|=h}\left|\frac{1}{(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j})!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}}F_s(k,k\widetilde{u})\right|_{v_0}\\&\leq\max\Bigg\{\max_{|\mathbf{j}|=h}\left|\frac{1}{(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j})!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}}F_s(k,k\widetilde{u})-\frac{1}{(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j})!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}}F_s(k,ku)\right|_{v_0},\\&\qquad\max_{|\mathbf{j}|=h}\left|\frac{1}{(\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j})!}\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}}F_s(k,ku)\right|_{v_0}\Bigg\}\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 7.3.24 et en remarquant que $(k, \boldsymbol{\tau}+\mathbf{j}) \in \boldsymbol{\Upsilon}$ pour tout $|\mathbf{j}| = h$, on a

$$\left|\frac{1}{h!}f^{(h)}(k)\right|_{v_0} \leq \|s\|_{v_0,\alpha} \max\left\{\max_{\lambda_0 \leq D_0}\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h_0)}}{h_0!}(k)\right|_{v_0} r_{p_0}^{-1}d(u,V), \alpha^{-1}\right\}.$$

Pour tout $R < r_{p_0}/\|u\|_{v_0}$, le lemme 7.3.12 entraîne par ailleurs que

$$|f|_{v_0,R} \leq \max_{\substack{|z|_{v_0}\leq R \\ \lambda_0 \leq D_0}}\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}}{\tau_0!}(z)\right|_{v_0} \|s\|_{v_0,\alpha}.$$

Nous allons appliquer le lemme 7.3.25 avec $R = \mathfrak{R} > 1$, $S_1 = S_0$ et $T_1 = (g+1)T$. D'après le lemme 7.3.6 (7), le réel γ du lemme 7.3.25 est majoré par

$$\exp((g+1)T \log S_0) \leq \exp((g+1)TS_0 \log \mathfrak{R}) = \exp((g+1)U).$$

De plus, on a

$$\left(\frac{1}{R}\right)^{T_1 S_1} = \left(\frac{1}{\mathfrak{R}}\right)^{(g+1)TS_0} \leq \left(\frac{1}{\mathfrak{R}}\right)^{(g+1)\widetilde{T}S_0/2} \exp(-(g+1)U/2) \leq e^{-U}.$$

D'après le lemme 7.3.25 et les remarques précédentes, la valeur absolue $|f(m)|_{v_0}$ est majorée par

$$\|s\|_{v_0} \max\left\{e^{-U} \max_{\substack{|z|_{v_0}\leq \mathfrak{R} \\ \lambda_0 \leq D_0}}\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(\tau_0)}}{\tau_0!}(z)\right|_{v_0}, e^{(g+1)U} \max_{\substack{h \leq (g+1)T \\ \lambda_0 \leq D_0 \\ k \leq S_0}}\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h_0)}}{h_0!}(k)\right|_{v_0} \max\left\{r_{p_0}^{-1}d(u,V), \alpha^{-1}\right\}\right\}.$$

De plus, $\alpha^{-1} \leq \exp(-U(g+1+\sqrt{C_0})) \leq \exp(-(g+1)U - U)$ et si C_0 est suffisamment grand, on a $r_{p_0}^{-1}d(u,V) \leq r_{p_0}^{-1}\exp(-2\sqrt{C_0}U) \leq \exp(-(g+1)U - U)$. On obtient alors

$$|f(m)|_{v_0} \leq e^{-U}\|s\|_{v_0,\alpha} \max\left\{\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(z)\right|_{v_0} \mid h \leq 2(g+1)T,\ \lambda_0 \leq D_0,\ |z|_{v_0} \leq \mathfrak{R}\right\}.$$

On conclut en appliquant une nouvelle fois le lemme 7.3.24.

□

7.3.9. Encadrement de la hauteur du jet. Rappelons que $D = [K : \mathbb{Q}]/[K_{v_0}/\mathbb{Q}_{v_0}]$.
7.3.9.1. *Minoration.*

LEMME 7.3.27. *Il existe une constante c_{41} telle que la hauteur de $\mathcal{J} \in S^\ell(W^\vee) \otimes_K K'$ vérifie*

$$h(\mathcal{J}) \geq -c_{41}T \max\{1, h(W)\} \geq -c_{41}\frac{U}{C_0 D}.$$

De plus, la constante c_{41} est de la forme $c_{42}\max\{1, \widehat{\mu}_{\max}(t_G)\}$, où $c_{42} \geq 1$ ne dépend que de g.

Démonstration : Comme $\mathcal{J} \in S^\ell(W^\vee) \otimes_K K'$ est non nul, on a l'inégalité $h(\mathcal{J}) \geq -\widehat{\mu}_{\max}(S^\ell(W^\vee))$. D'après la proposition 1.1.17 de la page 32, on en déduit que

$$h(\mathcal{J}) \geq -\widehat{\mu}_{\max}(S^\ell(W^\vee)) \geq -\ell\widehat{\mu}_{\max}(W^\vee) - 2\ell \log g.$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} h(W) = -\widehat{\deg}_{\mathrm{n}}(W) = -\sum_{i=1}^{g-t}\widehat{\mu}_i(W) &= \widehat{\mu}_{\max}(W^\vee) + \sum_{i=2}^{g-t}\widehat{\mu}_i(W^\vee) \\ &\geq \widehat{\mu}_{\max}(W^\vee) - (g-t-1)\widehat{\mu}_{\max}(t_{G_0\times G}), \end{aligned}$$

car chacune des pentes successives $\widehat{\mu}_i(W^\vee)$ vérifie

$$\widehat{\mu}_i(W^\vee) = -\widehat{\mu}_{\dim W+1-i}(W) \geq -\widehat{\mu}_{\max}(W) \geq -\widehat{\mu}_{\max}(t_{G_0\times G}).$$

On obtient la première inégalité en observant que $\ell \leq (g+1)T$ et que $\widehat{\mu}_{\max}(t_{G_0\times G}) = \max\{\widehat{\mu}_{\max}(t_G), \widehat{\mu}_{\max}(t_{G_0})\} = \max\{\widehat{\mu}_{\max}(t_G), 0\}$ (la première égalité correspond à la proposition 1.1.21). La seconde inégalité découle directement de la définition de T.

□

7.3.9.2. *Majoration dans le cas archimédien.*

PROPOSITION 7.3.28. *Supposons que la place v_0 est archimédienne et que le réel C_0 est supérieur à $\max\{c_{37}^2, c_{39}\}$. Alors on a*

$$h(\mathcal{J}) \leq \frac{2c_{33}U}{D\sqrt{C_0}} - \frac{U}{2D} + \aleph((P_{\lambda_0})_{\lambda_0})$$

où $\aleph((P_{\lambda_0})_{\lambda_0})$ désigne la quantité

$$\sum_{v\in\Sigma_K} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]} \log \max_{\substack{k\in\mathbb{N}, k\leq(g+1)S\\ \lambda_0\leq D_0\\ h\leq 2(g+1)T}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(k)\right|_v + \frac{1}{D}\log \max_{\substack{|z|\leq 2(g+1)S\mathfrak{e}\\ \lambda_0\leq D_0\\ h\leq 2(g+1)T}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(z)\right|_{v_0}.$$

Démonstration : D'après la définition de $\|\mathcal{J}\|_v$ et la proposition 7.3.23, il existe une constante $c\geq 1$ ne dépendant que de g telle que

$$\begin{aligned}
&\sum_{v\in\Sigma_{K'}, v|v_0} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]}\log\|\mathcal{J}\|_v \\
&\leq \sum_{v\in\Sigma_{K'}, v|v_0} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]}\left(-U+\log\|s\|_{\alpha,v} + \max_{\substack{|z|\leq 2(g+1)S\mathfrak{e}\\ \lambda_0\leq D_0\\ h\leq 2(g+1)T}} \log\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(z)\right|_{v_0} + cT\right) \\
&\leq \sum_{v\in\Sigma_{K'}, v|v_0} \frac{[K'_v:\mathbb{Q}_v]}{[K':\mathbb{Q}]}\log\|s\|_{\alpha,v} + \frac{1}{D}\left(-\frac{U}{2} + \max_{\substack{|z|\leq 2(g+1)S\mathfrak{e}\\ \lambda_0\leq D_0\\ h\leq 2(g+1)T}} \log\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(z)\right|_{v_0}\right).
\end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec la proposition 7.3.19, on obtient

$$\begin{aligned}
h(\mathcal{J}) \leq& h_\alpha(s) + c_{37}\frac{U}{C_0 D} - \frac{U}{2D} + \frac{1}{D}\log \max_{\substack{|z|\leq 2(g+1)S\mathfrak{e}\\ \lambda_0\leq D_0\\ h\leq 2(g+1)T}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(z)\right|_{v_0} \\
&+ \sum_{v\in\Sigma_K, v\neq v_0} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\log \max_{\substack{\lambda_0\leq D_0\\ h\leq(g+1)T}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(m)\right|_v.
\end{aligned}$$

D'après la proposition 7.3.14, on a par ailleurs

$$h_\alpha(s) \leq \frac{c_{33}}{D\sqrt{C_0}}U + \frac{1}{D}\max_{\substack{\lambda_0\leq D_0\\ k\in\mathbb{N}, k\leq S_0\\ h\leq 2(g+1)T}} \log\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(k)\right|_{v_0},$$

ce qui achève la preuve.

□

7.3.9.3. *Majoration dans le cas ultramétrique.*

PROPOSITION 7.3.29. *Supposons que la place v_0 est finie et que $C_0\geq\max\{c_{37}^2, c_{40}\}$. Alors on a*

$$h(\mathcal{J}) \leq -\frac{U}{D} + \frac{2c_{33}U}{D\sqrt{C_0}} + \aleph((P_{\lambda_0})_{\lambda_0})$$

où

$$\aleph((P_{\lambda_0})_{\lambda_0}) = \sum_{v\in\Sigma_K} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\log \max_{\substack{k\in\mathbb{N}, k\leq (g+1)S\\ \lambda_0\leq D_0\\ h\leq 2(g+1)T}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(k)\right|_v$$
$$+\frac{1}{D}\log\max\left\{\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(z)\right|_{v_0} \mid h\leq 2(g+1)T,\ \lambda_0\leq D_0,\ |z|_{v_0}\leq \mathfrak{R}\right\}.$$

Démonstration : D'après les propositions 7.3.19 et 7.3.26, on a

$$\begin{aligned} h(\mathcal{J}) \leq & h_\alpha(s) - \frac{U}{D} \\ & + \frac{1}{D}\log\max\left\{\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(z)\right|_{v_0} \mid h\leq 2(g+1)T,\ \lambda_0\leq D_0,\ |z|_{v_0}\leq \mathfrak{R}\right\} \\ & + \sum_{v\neq v_0} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\log \max_{\substack{h\leq (g+1)T\\ \lambda_0\leq D_0}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(m)\right|_v + c_{37}\frac{U}{DC_0}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 7.3.14, la hauteur $h_\alpha(s)$ est majorée par

$$c_{33}\frac{U}{D\sqrt{C_0}} + \frac{1}{D}\max_{\substack{\lambda_0\leq D_0\\ k\in\mathbb{N}, k\leq S_0\\ h\leq 2(g+1)T}} \log\left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(k)\right|_{v_0}.$$

On en déduit immédiatement la majoration voulue.

□

7.3.10. Poids de la droite affine. L'objet de ce paragraphe est de fixer le choix de la famille de polynômes $(P_{\lambda_0})_\lambda$ et de majorer la quantité $\aleph((P_{\lambda_0})_{\lambda_0})$ qui apparaît dans les propositions 7.3.28 et 7.3.29. La majoration de $\aleph((P_{\lambda_0})_{\lambda_0})$ a une influence directe sur la minoration de $d(u,V)$ obtenue ; comme l'a remarqué Fel'dman [**27**], il existe des familles de polynômes qui conviennent mieux que la base canonique $(X^{\lambda_0})_{\lambda_0\leq D_0}$ de $K[X]_{\leq D_0}$. Nous utiliserons une variante des polynômes de Fel'dman, construite par Matveev [**55**]. Considérons les polynômes binomiaux

$$\Delta_0(X) := 1,\quad \Delta_k := \frac{X(X+1)\cdots(X+k-1)}{k!},\ k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Définition 7.3.30. Étant donnés deux entiers naturels a et b, le polynôme de Matveev $\delta_b(X;a)$ est $\Delta_b(X)^q\Delta_r(X)$, où q et r désignent respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

Rappelons que l'on a noté $D = [K:\mathbb{Q}]/[K_{v_0}:\mathbb{Q}_{v_0}]$.

Proposition 7.3.31 (lemme 3.10 de [**35**]). *Soit $b\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. On pose $\mathfrak{r} = 2(g+1)\mathfrak{e}S$ si v_0 est archimédienne, et $\mathfrak{r} = \mathfrak{R}$ si v_0 est une place finie. Il existe une constante absolue $c_{43}\geq 1$ vérifiant la propriété suivante. Si $P_{\lambda_0} = \delta_b(X;\lambda_0)$ pour tout $\lambda_0\leq D_0$, alors la quantité $\aleph((P_{\lambda_0})_{\lambda_0})$ égale à*

$$\sum_{v\in\Sigma_K} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\log \max_{\substack{k\in\mathbb{N}, k\leq (g+1)S\\ \lambda_0\leq D_0\\ h\leq 2(g+1)T}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(k)\right|_v + \frac{1}{D}\log\max_{\substack{|z|_{v_0}\leq\mathfrak{r}\\ \lambda_0\leq D_0\\ h\leq 2(g+1)T}} \left|\frac{P_{\lambda_0}^{(h)}}{h!}(z)\right|_{v_0}$$

est majorée par

$$c_{43}\left(D_0\log(e+\frac{S}{b}) + bT + \frac{D_0}{D}\log(1+\frac{\mathfrak{e}S}{b})\right).$$

si v_0 est archimédienne, et par

$$c_{43}\left(D_0\log(e+\frac{S}{b})+bT+\frac{D_0}{D}\log(\mathfrak{R})\right).$$

si v_0 est une place finie.

REMARQUE 7.3.32. Le choix de la base canonique de $K[X]_{\lambda_0\leq D_0}$ pour la famille $(P_{\lambda_0})_{\lambda_0}$ conduit à la majoration

$$\aleph((X^{\lambda_0})_{\lambda_0})\leq c_{43}D_0\left(\log S+\frac{\log\mathfrak{e}}{D}\right),$$

qui est insuffisante pour démontrer les théorèmes 7.2.3 et 7.2.4.

7.3.11. Conclusion. Nous allons maintenant combiner les estimations des paragraphes 7.3.9 et 7.3.10 pour aboutir à une contradiction.

7.3.11.1. *Cas archimédien.* Supposons que la place v_0 est archimédienne et que le nombre réel C_0 est supérieur à $\max\{c_{24},c_{26},c_{37}^2,c_{39}\}$. Sous l'hypothèse 2, les propositions 7.3.27 et 7.3.28 entraînent

$$-c_{41}\frac{U}{C_0D}\leq h(\mathcal{J})\leq\frac{2c_{33}}{D\sqrt{C_0}}U-\frac{U}{2D}+\aleph((P_{\lambda_0})_{\lambda_0}),$$

d'où

$$U\leq\frac{2c_{41}+4c_{33}}{\sqrt{C_0}}U+D\aleph((P_{\lambda_0})_{\lambda_0}).$$

On pose $b=\left[\frac{S_0\log\mathfrak{e}}{C_0D}\right]$ et $P_{\lambda_0}=\delta_b(X;\lambda_0)$ pour tout entier naturel $\lambda_0\leq D_0$. D'après la proposition 7.3.31, on a la majoration

$$\begin{aligned}\aleph((P_{\lambda_0})_{\lambda_0})&\leq c_{43}\left(D_0\log(e+\frac{S}{b})+bT+\frac{D_0}{D}\log(1+\frac{\mathfrak{e}S}{b})\right)\\&\leq c_{43}\left(D_0\log(e+\frac{2SC_0D}{S_0\log\mathfrak{e}})+\frac{1}{C_0D}TS_0\log\mathfrak{e}+\frac{D_0}{D}\log(1+\frac{2\mathfrak{e}SC_0D}{S_0\log\mathfrak{e}})\right)\\&\leq 3c_{43}\frac{D_0A_0}{D}+c_{43}\frac{U}{C_0D}\\&\leq 4c_{43}\frac{U}{C_0D}.\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$U\leq\frac{2c_{41}+4c_{33}+4c_{43}}{\sqrt{C_0}}U.$$

On a donc une contradiction dès que l'inégalité

$$C_0>\max\{c_{24},c_{26},c_{37}^2,c_{39},(2c_{41}+4c_{33}+4c_{43})^2\}$$

est satisfaite. Dans ce cas, on en déduit que l'hypothèse 2 ne peut pas être vérifiée et donc que $d(u,V)>\exp(-2\sqrt{C_0}U)$. Pour conclure, il suffit de comparer U avec la quantité U_2 du théorème 7.2.3. On a

$$(58)\quad U\leq 8^{\frac{4g+1}{t}}C_0^{2+\frac{1}{t}(4g+3)}\mathfrak{a}\log\mathfrak{e}\left(\frac{D}{\log\mathfrak{e}}\log\left(e+\frac{D}{\log\mathfrak{e}}\right)+1\right)^{1/t}\times\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{D\max_{k\leq(g+1)C_0^3\mathfrak{a}}h(k\mathbf{p}_i)+(\mathfrak{e}\mathfrak{a}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}}{\mathfrak{a}\log\mathfrak{e}}\right)^{g_i/t}.$$

De plus, $h(V)=h(W)$, et d'après le lemme 6.3.4 de la page 111, il existe une constante $c_{44}\geq 1$ ne dépendant que de ϕ et de la famille de normes $(\|.\|_v)_{v\in\Sigma_K}$ telle que

$$\frac{\max\{D,Dh(W),\log(\deg H),\log_+\|u\|_{v_0}\}}{\log\mathfrak{e}}\leq c_{44}\frac{\max\{D,Dh(W),\log_+\|u\|_{v_0}\}}{\log\mathfrak{e}}\leq c_{44}\mathfrak{A}.$$

Quitte à remplacer $8^{\frac{4g+1}{t}}$ par une constante plus grande, on peut donc remplacer $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{A}$ dans l'inégalité (58). Par ailleurs, il existe une constante c_{45} telle que $\frac{D}{\log \mathfrak{e}} \log\left(e + \frac{D}{\log \mathfrak{e}}\right) \leq c_{45} \frac{D}{\log \mathfrak{e}} \log\left(\frac{D}{\log \mathfrak{e}}\right)$. Le théorème 7.2.3 est donc démontré, une fois que l'on a remarqué que

$$\max_{k \leq (g+1)C_0^3 \mathfrak{a}} h(k\mathbf{p}_i) \leq \max_{k \leq ([(g+1)C_0^3]+1)[\mathfrak{a}])} h(k\mathbf{p}_i) \leq c_{46}(2(g+1)C_0^3)^{\rho_i} \max_{k \leq \mathfrak{a}} h(k\mathbf{p}_i)$$

pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Cette dernière inégalité est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 7.3.33. *Il existe une constante $c_{46} \geq 1$ telle pour tout couple d'entiers naturels non nuls a_1, a_2 et pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on ait*

$$\max_{k \leq a_1 a_2} h(k\mathbf{p}_i) \leq c_{46} a_1^{\rho_i} \max_{k \leq a_2} h(k\mathbf{p}_i).$$

Démonstration : On a

$$\max_{k \leq a_1 a_2} h(k\mathbf{p}_i) = \max \left\{ \max_{k \leq a_2} h(k\mathbf{p}_i), \max_{a_2 < k \leq a_1 a_2} h(k\mathbf{p}_i) \right\}.$$

Soit $k \in \{a_2 + 1, \ldots, a_1 a_2\}$. Soient $q, r \in \mathbb{N}$ le quotient et le reste de la division euclidienne de k par a_2 : $k = q a_2 + r$, $r < a_2$. Comme $k \leq a_1 a_2$, q est inférieur à a_1. D'après la propriété 4.5 de [**79**], il existe une constante c telle que

$$h(k\mathbf{p}_i) \leq c \max\{1, h(q a_2 \mathbf{p}_i), h(r\mathbf{p}_i)\}.$$

D'après [**33**, page 144], il existe une constante c' telle que

$$h(q a_2 \mathbf{p}_i) \leq c' q^{\rho_i} (h(a_2 \mathbf{p}_i) + 1) \leq 2c' a_1^{\rho_i} \max_{0 \leq \ell \leq a_2} h(\ell \mathbf{p}_i).$$

De plus, $h(r\mathbf{p}_i) \leq \max_{0 \leq \ell \leq a_2} h(\ell\mathbf{p}_i)$. Quitte à agrandir c', on en déduit que $h(k\mathbf{p}_i) \leq 2cc' a_1^{\rho_i} \max_{0 \leq \ell \leq a_2} h(\ell\mathbf{p}_i)$, et donc

$$\max_{k \leq a_1 a_2} h(k\mathbf{p}_i) = \max\{\max_{k \leq a_2} h(k\mathbf{p}_i), \max_{a_2 < k \leq a_1 a_2} h(k\mathbf{p}_i)\} \leq 2cc' a_1^{\rho_i} \max_{\ell \leq a_2} h(\ell\mathbf{p}_i),$$

ce qui démontre le lemme.

□

Remarque 7.3.34. Le lemme 7.3.33 permet de remplacer les quantités $\max_{k \leq \mathfrak{A}} h(k\mathbf{p}_i)$ du théorème 7.2.3 par $c_{46}\mathfrak{A}^{\rho_i} \max\{1, h(\mathbf{p}_i)\}$. Mais comme l'a souligné Gaudron dans [**33**, page 145], cette majoration peut s'avérer particulièrement maladroite, notamment lorsque $\mathbf{p}_i$ est un point de torsion.

Remarque 7.3.35. La quantité $\max\{c_{24}, c_{26}, c_{37}^2, c_{39}, (2c_{41} + 4c_{33} + 4c_{43})^2\}$ de la démonstration est majorée par $c_{47} c_{37}^2 (\deg G)^2 \max\{1, \widehat{\mu}_{\max}(t_G)\}$, où $c_{47} \geq 1$ est une constante ne dépendant que de g, ϕ, $\|.\|_{v_0}$. Sous les hypothèse du théorème, nous avons montré que pour tout réel $\mathfrak{a} \geq 1$ supérieur à

$$\frac{\max\{D, Dh(W), \log(\deg H), \log_+ \|u\|_{v_0}\}}{\log \mathfrak{e}},$$

on a la minoration

$$\log d(u, V) \geq -c_{48} C_1^{5/2 + \frac{1}{t}(4g+3)} \mathfrak{a} \log \mathfrak{e} \left(\frac{D}{\log \mathfrak{e}} \log\left(\frac{D}{\log \mathfrak{e}}\right) + 1 \right)^{1/t}$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\max_{k \leq c_{48} C_1^3 \mathfrak{a}} h(k\mathbf{p}_i) + (\mathfrak{e}\mathfrak{a}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}}{\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}} \right)^{g_i/t},$$

où $c_{48} \geq 1$ est une constante ne dépendant que de g, ϕ, $\|.\|_{v_0}$ et

$$C_1 := c_{37}^2 (\deg G)^2 \max\{1, \widehat{\mu}_{\max}(t_G)\}.$$

7.3.11.2. *Cas ultramétrique.* Supposons que la place v_0 est finie et que le nombre réel C_0 est supérieur à $\max\{(\log p_0)^2, e^2, c_{24}, c_{26}, c_{37}^2, c_{40}\}$. Les propositions 7.3.27 et 7.3.29 entraînent

$$-c_{41}\frac{U}{C_0D} \leq h(\mathcal{J}) \leq -\frac{U}{D} + \frac{2c_{33}U}{\sqrt{C_0}D} + \aleph((P_{\lambda_0})_{\lambda_0}),$$

d'où

$$U \leq (c_{41} + 2c_{33})\frac{U}{\sqrt{C_0}} + D\aleph((P_{\lambda_0})_{\lambda_0})$$

On pose $b = [S_0 \log \mathfrak{R}/(C_0D)]$ et $P_{\lambda_0} = \delta_b(X; \lambda_0)$ pour tout entier naturel $\lambda_0 \leq D_0$. D'après la proposition 7.3.31, on a la majoration

$$\begin{aligned}
\aleph((P_{\lambda_0})_{\lambda_0}) &\leq c_{43}\left(D_0\log(e + \frac{S}{b}) + bT + \frac{D_0}{D}\log\left(1 + \frac{\max\{S_0, \mathfrak{R}\}}{b}\right)\right)\\
&\leq c_{43}\left(D_0\log(e + \frac{2SC_0D}{S_0\log\mathfrak{R}}) + \frac{1}{C_0D}TS_0\log\mathfrak{R} + \frac{D_0}{D}\log(1 + \frac{\mathfrak{R}C_0D}{\log\mathfrak{R}})\right)\\
&\leq c_{43}\left(\frac{A_0D_0}{D} + \frac{U}{C_0D}\right)\\
&\leq 2c_{43}\frac{U}{C_0D}.
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$U \leq (c_{41} + 2c_{33} + 2c_{43})\frac{U}{\sqrt{C_0}}.$$

On a donc une contradiction dès que

$$C_0 > \max\{(\log p_0)^2, e^2, c_{24}, c_{26}, c_{37}^2, c_{40}, (c_{41} + 2c_{33} + 2c_{43})^2\}.$$

On en déduit que l'hypothèse 2 ne peut pas être vérifiée et donc que $d(u, V) > \exp(-2\sqrt{C_0}U)$. Le théorème 7.2.4 découle alors d'une comparaison entre U et la quantité U_3 du théorème, similaire à celle du cas archimédien.

7.4. Démonstration dans le cas général

Nous allons maintenant passer à la démonstration des théorèmes 7.2.1 et 7.2.2. Le schéma de la preuve est identique, à la différence que nous n'ajouterons pas de facteur $G_0 = \mathbb{G}_a$ au cours de la démonstration. Les paramètres A_0 et D_0 n'interviennent plus ici, et la définition de U est donc légèrement différente. La démonstration est ainsi simplifiée : par exemple, nous n'aurons pas à évaluer le « poids de la droite affine » comme au paragraphe 7.3.10. Certaines étapes nécessitent des modifications mineures (définition de $\widetilde{G}$, lemme de multiplicités, majoration du rang de A_0) et nous reproduirons les preuves adaptées en détails. En revanche, toutes les estimations analytiques de la démonstration ne seront que des cas particuliers de celles que nous avons déjà démontré, pour lesquelles il nous suffira de poser $D_0 = 0$.

Dans la suite, nous supposons que l'hypothèse 1 est vérifiée : pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G tel que $t_{G'} + V \neq t_G$, on a $u \notin t_{G'}(\mathbb{C}_{v_0})$.

7.4.1. Choix d'un sous-groupe. Soient $\widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_n, \widetilde{T}, C_0$ des nombres réels strictement positifs et $0 < S_0 < S$ des entiers. On suppose que $\widetilde{T} > 1$ et on pose $T = [\widetilde{T}]$. Dans toute la suite, si G' est un sous-groupe algébrique de G, on note $\lambda' = \operatorname{codim}_V(t_{G'} \cap V)$ et $r' = \operatorname{codim}_G(G')$. Posons $\Sigma_{\mathbf{p}}(S) = \{0_G, \mathbf{p}, \ldots, S\mathbf{p}\}$.

Définition 7.4.1. Soit G' un sous-groupe algébrique connexe de G tel que $t_{G'} + V \neq t_G$. On définit le réel strictement positif

$$A(G') = \left(\frac{\widetilde{T}^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right) \mathscr{H}(G'; \widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_n)}{C_0 \mathscr{H}(G; \widetilde{D}_1, \ldots, \widetilde{D}_n)}\right)^{\frac{1}{r' - \lambda'}}$$

et on pose $B(G') = A(G')^{\frac{r'-\lambda'}{r'}} \max\{1, A(G')\}^{\frac{\lambda'}{r'}}$.

Comme dans le cas semi-abélien, la quantité

$$x := \inf\{B(G') \mid t_{G'} + V \neq t_G\},$$

où G' varie parmi les sous-groupes algébriques connexes G' de G tel que $t_{G'} + V \neq t_G$, est un nombre réel strictement positif. Fixons un sous-groupe $\widetilde{G}$ de G tel que $B(\widetilde{G}) = x$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on pose également $D_i^{\#} = x\widetilde{D}_i$, $D_i = [D_i^{\#}]$ et $D_i' = \max\{1, D_i\}$. La démonstration du lemme suivant est identique à celle du lemme 7.3.2.

LEMME 7.4.2. *Supposons que $x \leq 1$. Alors pour tout sous-groupe algébrique connexe G' de G tel que $t_{G'} + V \neq t_G$, l'inégalité suivante est vérifiée :*

$$\widetilde{T}^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right) \mathscr{H}(G'; D_1^{\#}, \ldots, D_n^{\#}) \geq C_0 \mathscr{H}(G; D_1^{\#}, \ldots, D_n^{\#}). \tag{59}$$

De plus, cette inégalité est une égalité pour $G' = \widetilde{G}$.

Comme dans le cas semi-abélien, le résultat suivant découle du lemme 6.4.3 et du lemme 7.4.2.

LEMME 7.4.3. *Supposons que $x \leq 1$. Si la place v_0 est finie, alors*

$$\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right) = S + 1.$$

Si v_0 est une place archimédienne, il existe une constante $c_{49} \geq 1$ telle que si

$$d(u, V) < \frac{1}{C_0 c_{49} S (D_1')^{g_1} \cdots (D_n')^{g_n} \deg(H)},$$

alors il n'existe pas d'entier $s \in \{1, \ldots, S\}$ tel que $s\mathbf{p} \in \widetilde{G}(\overline{K})$. En particulier

$$\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right) = S + 1.$$

De plus, la constante c_{49} est de la forme $c_{50} \times \deg G$, où c_{50} ne dépend que de g, ϕ, $(\|.\|_v)_{v \in \Sigma_K}$.

Démonstration : Si la place v_0 est finie, l'exponentielle exp réalise un difféomorphisme de $D(0, r_{p_0})$ sur son image. S'il existe $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $s\mathbf{p} \in \widetilde{G}(\overline{K})$, on en déduit que $u \in t_{\widetilde{G}}(\mathbb{C}_{v_0})$, ce qui est absurde d'après l'hypothèse 1 (par construction, on a $t_{\widetilde{G}} + V \neq t_G$). Supposons que la place v_0 est archimédienne. Nous allons appliquer le lemme 6.4.3 à $\mathcal{G} = G$, $\mathcal{H} = H$ et au point $u \in t_G$. L'hypothèse 1 correspond alors à celle du lemme 6.4.3 (1). Par définition de $\widetilde{G}$, on a $t_{\widetilde{G}} + V \neq t_G$. De plus, d'après le lemme 7.4.2, on a

$$\widetilde{T}^{\widetilde{\lambda}} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right) \mathscr{H}(\widetilde{G}; D_1^{\#}, \ldots, D_n^{\#}) = C_0 \mathscr{H}(G; D_1^{\#}, \ldots, D_n^{\#}).$$

D'après [**46**, propriété 4.4], pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, l'application partielle

$$x_i \mapsto \mathscr{H}(G; x_1, \ldots, x_n) / \mathscr{H}(\widetilde{G}; x_1, \ldots, x_n)$$

est croissante. Comme $D_i^{\#} \leq 2D_i'$, on en déduit que

$$\widetilde{T}^{\widetilde{\lambda}} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right) \mathscr{H}(\widetilde{G}; D_1', \ldots, D_n') \leq C_0 2^g \mathscr{H}(G; D_1', \ldots, D_n').$$

Comme $1 \leq D_i'$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a par ailleurs

$$\deg(\widetilde{G}) = \mathscr{H}(\widetilde{G}; 1, \ldots, 1) \leq \mathscr{H}(\widetilde{G}; D_1', \ldots, D_n'),$$

et donc

$$\begin{aligned} \deg(\widetilde{G}) &\leq C_0 2^g \mathscr{H}(G; D_1', \ldots, D_n') \\ &= C_0 2^g \deg(G) (D_1')^{g_1} \cdots (D_n')^{g_n}. \end{aligned}$$

On conclut alors avec le lemme 6.4.3.

□

7.4.2. Fibré adélique hermitien des sections auxiliaires. Nous allons définir un fibré adélique E de la même façon que dans le cas semi-abélien. Notons $\mathbb{P} = \mathbb{P}_K^{N_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_K^{N_n}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on fixe des coordonnées homogènes $(X_{i,j})_{0 \leq j \leq N_i}$ de $\mathbb{P}_K^{N_i}$. Notons également $\mathbf{D} = (D_1, \ldots, D_n)$ et $K[\mathbb{P}]$ la K-algèbre multigraduée des polynômes multihomogènes en les variables $(X_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq N_i}$. Soit E l'espace des polynômes de multidegré $\mathbf{D}$ de qui ne s'annulent pas identiquement sur G ; en notant I_G l'idéal annulateur de G dans $\mathbb{P}$, on a ainsi $E = (K[\mathbb{P}]/I_G)_{\mathbf{D}}$. Considérons l'ensemble

$$\Lambda = \{\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\lambda}_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^{n} \mathbb{N}^{N_i+1} \mid \boldsymbol{\lambda}_i = (\lambda_{i,j})_{0 \leq j \leq N_i},\ |\boldsymbol{\lambda}_i| = D_i\}.$$

L'ensemble des classes de polynômes de la forme

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{N_i} X_{i,j}^{\lambda_{i,j}}, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$$

forme une famille génératrice de E. Soit $(P_1, \ldots, P_{\dim E})$ une famille de tels polynômes dont les classes $s_1, \ldots, s_{\dim E}$ forment une base de E. On définit alors un fibré adélique hermitien $(E, (\|.\|_{E,v})_{v \in K})$ en choisissant pour chaque place $v \in \Sigma_K$ la norme $\|.\|_{E,v}$ rendant cette base orthonormée. On a ainsi $\widehat{\mu}_{\mathrm{n}}(E) = 0$. Concrètement, un élément s de E s'écrit comme la classe d'équivalence d'un polynôme

$$P = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{N_i} X_{i,j}^{\lambda_{i,j}}. \tag{60}$$

On note alors $F_s = P \circ \Psi \colon \mathscr{U} \to \mathbb{C}_{v_0}$. Cette application est bien définie car elle ne dépend pas du choix d'un polynôme P représentant s. Pour toute section $s \in E$, il existe donc une unique famille $(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda}$ d'éléments de K telle que pour tout $\mathbf{z} = (\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n) \in \mathscr{U}$, on ait

$$F_s(\mathbf{z}) = \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} p_{\boldsymbol{\lambda}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{N_i} \varphi_{i,j}(\mathbf{z}_i)^{\lambda_{i,j}}.$$

Avec ces notations, pour toute place v de K, la norme $\|.\|_{E,v}$ satisfait

$$\|s\|_{E,v} = |(p_{\boldsymbol{\lambda}})_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda}|_{2,v} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} |p_{\boldsymbol{\lambda}}|_v^2\right)^{1/2} & \text{si } v \text{ est archimédienne,} \\ \max_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} |p_{\boldsymbol{\lambda}}|_v & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons maintenant définir une norme particulière en la place v_0. Rappelons que $S_0 > 0$ est un entier et que $T = [\widetilde{T}]$. On considère l'ensemble

$$\boldsymbol{\Upsilon} = \{(m, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{g-t} \mid m \leq S_0,\ |\boldsymbol{\tau}| \leq 2gT\}.$$

Soit $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_{g-t})$ une base de $V \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ formée de vecteurs de normes 1. Considérons la matrice $\mathcal{A}_0$ de taille $\operatorname{card} \boldsymbol{\Upsilon} \times \dim E$ définie par : pour tout $(m, \boldsymbol{\tau}) \in \boldsymbol{\Upsilon}$, pour tout $i \in \{1, \ldots, \dim E\}$,

$$\mathcal{A}_0[(m, \boldsymbol{\tau}), i] = \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} D_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_{s_i}(mu).$$

Étant donné un nombre $\alpha \in |K_{v_0}^{\times}|_{v_0}$ et une place v de K, on définit une norme $\|.\|_{\alpha,v}$ sur $E \otimes_K \mathbb{C}_v$ en posant $\|.\|_{\alpha,v} = \|.\|_{E,v}$ si $v \neq v_0$ et

$$\|s\|_{\alpha,v_0} = \begin{cases} \max\{\|s\|_{E,v_0}, \alpha |\mathcal{A}_0 s|_{2,v_0}\} & \text{si } v_0 \text{ est finie,} \\ (\|s\|_{E,v_0}^2 + (\alpha |\mathcal{A}_0 s|_{2,v_0})^2)^{1/2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que pour toute place $v \in \Sigma_K$, on a l'inégalité $\|.\|_{E,v} \leq \|.\|_{\alpha,v}$. On note h_α la hauteur (logarithmique et absolue) sur $E \otimes_K \overline{K}$ associée à la famille de normes $(\|.\|_{\alpha,v})_{v \in \Sigma_K}$.

7.4.3. Lemme de multiplicités. Nous allons maintenant énoncer une conséquence du lemme de multiplicités de Philippon [**65**]. La preuve diffère légèrement de celle du cas semi-abélien, et les conditions (a) et (c) de l'énoncé ci-dessous ne sont pas les mêmes que celles du lemme 7.3.4. Cette différence nous conduira à faire un nouveau choix de paramètres au paragraphe 7.4.4.

LEMME 7.4.4. *Supposons que $x \leq 1$. Il existe une constante $c_{51} \geq 1$ vérifiant la propriété suivante. Si les conditions*

(a) $(c_{26} S (D'_1)^{g_1} \cdots (D'_n)^{g_n})^{-1} > d(u, V)$ *;*

(b) $\min\{T, S\} > C_0 > c_{51}$ *;*

(c) $T > c_{51} \max\{D'_1, \ldots, D'_n\}$

sont vérifiées, alors il n'existe pas d'élément $s \in E \otimes_K \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ telle que

$$\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(m, mu) = 0 \quad \forall (m, \boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{g-t},\ m \leq gS,\ |\boldsymbol{\tau}| \leq gT. \tag{61}$$

De plus $c_{51} = c_{52} \times (\deg G)^2$, où $c_{52} \geq 1$ ne dépend que de g, ϕ, $\|.\|_{v_0}$.

Démonstration : Nous raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une solution $s \in E \otimes_K \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ au système d'égalités (61). D'après le lemme de multiplicités de Philippon [**65**], il existe un sous-groupe algébrique connexe et strict G' de G tel que

$$T^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})} \right) \mathscr{H}(G'; D'_1, \ldots, D'_n) \leq 2^g \mathscr{H}(G; D'_1, \ldots, D'_n). \tag{62}$$

Étape 1 : Montrons que $t_{G'} + V \neq t_G$. Par l'absurde, si $t_{G'} + V = t_G$ alors $\lambda' = r' = \operatorname{codim}_G G'$ et on en déduit que

$$T^{r'} \leq 2^g \deg(G) \max\{D'_1, \ldots, D'_n\}^{r'},$$

ce qui contredit la condition (c) pourvu que l'on choisisse la constante c_{52} assez grande.

Étape 2 : Montrons que $\lambda' \geq 1$ ou $\{\forall m \in \{1, \ldots, S\},\ m\mathbf{p} \notin G'(K)\}$. D'après la première étape, $t_{G'} + V \neq t_G$, donc d'après l'hypothèse 1 on a $u \notin t_{G'}(\mathbb{C}_{v_0})$. Si $\lambda' = \operatorname{codim}_V(t'_G \cap V) = 0$, alors $V \subseteq t'_G$. D'après l'inégalité (62), on a

$$\deg G' \leq 2^g \deg(G) (D'_1)^{g_1} \cdots (D'_n)^{g_n}.$$

D'après la condition (a), on en déduit que

$$d(u, V) \leq \frac{2^g \deg(G)}{c_{51} S \deg G'}.$$

En appliquant le second point du lemme 6.4.3 au vecteur u avec $\mathcal{G} = G$, $\mathcal{G}' = G'$, $\mathcal{H} = H$, on en déduit que pour tout $0 < m \leq S$, $m\mathbf{p} \notin G'(K)$ (pourvu que la constante c_{52} soit choisie suffisamment grande).

Étape 3 : Nous allons conclure en montrant que l'inégalité (62) contredit le lemme 7.4.2. Premièrement, remarquons qu'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $D_i \neq 0$. En effet, sinon tous les D'_i sont égaux à 1 et l'inégalité (62) entraîne

$$T^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})} \right) \leq 2^g \deg(G).$$

D'après l'étape 2, on obtient $\min\{T, S+1\} \leq 2^g \deg(G)$, ce qui contredit la condition (b). Il existe donc au moins un entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $D_i \neq 0$.

On considère alors les entiers $1 \leq k_1 < \cdots < k_h \leq n$ pour lesquels $D_{k_i} \neq 0$, $1 \leq i \leq h$, et on note π la projection

$$\pi \colon G \to \prod_{i=1}^{h} G_{k_i}.$$

D'après les propriétés du polynôme $\mathscr{H}$ rappelées au paragraphe 6.1.1, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(G; D'_1, \ldots, D'_n) &= g! \prod_{D_j=0} \frac{\deg G_j}{g_j!} \times \prod_{D_i \neq 0} \frac{\mathscr{H}(G_i)}{g_i!} \\ &= \frac{g!}{(\dim \pi(G))!} \prod_{D_j=0} \frac{\deg G_j}{g_j!} \cdot \mathscr{H}(\pi(G); D_{k_1}, \ldots, D_{k_h}).\end{aligned}$$

Comme le coefficient multinomial

$$\frac{(\dim \pi(G))!}{\prod_{D_i \neq 0} g_i!}$$

est un entier strictement positif, on a $(\dim \pi(G))! \geq \prod_{D_i \neq 0} g_i!$ et donc

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(G; D'_1, \ldots, D'_n) &\leq g! \prod_{D_i \neq 0} \frac{1}{g_i!} \prod_{D_j=0} \frac{\deg G_j}{g_j!} \cdot \mathscr{H}(\pi(G); D_{k_1}, \ldots, D_{k_h}) \\ &\leq g! \prod_{j=1}^{n} \frac{\deg G_j}{g_j!} \cdot \mathscr{H}(\pi(G); D_{k_1}, \ldots, D_{k_h}) \\ &= \deg(G) \cdot \mathscr{H}(\pi(G); D_{k_1}, \ldots, D_{k_h}).\end{aligned}$$

On a également

$$\mathscr{H}(\pi(G'); D_{k_1}, \ldots, D_{k_h}) \leq \mathscr{H}(G'; D'_1, \ldots, D'_n).$$

En utilisant l'inégalité (62), on obtient

$$T^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right) \leq 2^g \deg(G) \cdot \frac{\mathscr{H}(\pi(G); D_{k_1}, \ldots, D_{k_h})}{\mathscr{H}(\pi(G'); D_{k_1}, \ldots, D_{k_h})}.$$

Puisque $D_i = [D_i^{\#}] \leq D_i^{\#}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on obtient l'inégalité

$$T^{\lambda'} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right) \leq 2^g \deg(G) \cdot \frac{\mathscr{H}(\pi(G); D_{k_1}^{\#}, \ldots, D_{k_h}^{\#})}{\mathscr{H}(\pi(G'); D_{k_1}^{\#}, \ldots, D_{k_h}^{\#})} \tag{63}$$

par croissance des applications partielles

$$x_i \mapsto \mathscr{H}(\pi(G); x_{k_1}, \ldots, x_{k_h}) / \mathscr{H}(\pi(G'); x_{k_1}, \ldots, x_{k_h})$$

(voir [**46**, propriété 4.4]). On considère le groupe G'' (vu comme un sous-groupe de G après permutation éventuelle des facteurs) défini par

$$G'' = \pi(G') \times \prod_{j \notin \{k_1, \ldots, k_h\}} G_j.$$

Le groupe G'' est un sous-groupe strict de G, car sinon $\pi(G') = \pi(G)$ et l'inégalité (63) ainsi que l'étape 2 entraînent $\min\{T, S+1\} \leq 2^g \deg(G)$, ce qui contredit la condition (b) pourvu que l'on ait $c_{51} \geq 2^g \deg(G)$. On a par ailleurs

$$\frac{\mathscr{H}(\pi(G); D_{k_1}^{\#}, \ldots, D_{k_h}^{\#})}{\mathscr{H}(\pi(G'); D_{k_1}^{\#}, \ldots, D_{k_h}^{\#})} = \frac{(\dim G'')!(\dim \pi(G))!}{g!(\dim \pi(G'))!} \cdot \frac{\mathscr{H}(G; D_1^{\#}, \ldots, D_n^{\#})}{\mathscr{H}(G''; D_1^{\#}, \ldots, D_n^{\#})}$$

et

- $\dim \pi(G) - \dim \pi(G') = \operatorname{codim}_G G'' = r''$,
- $\lambda'' = \operatorname{codim}_V(V \cap t_{G''}) \leq \operatorname{codim}_V(V \cap t_{G'}) = \lambda'$ (car $G' \subseteq G''$),
- $\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + G''(\overline{K})}{G''(\overline{K})}\right) \leq \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + G'(\overline{K})}{G'(\overline{K})}\right)$.

D'après l'inégalité (63), on en déduit qu'il existe une constante c ne dépendant que de g telle que

$$T^{\lambda''} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S) + G''(\overline{K})}{G''(\overline{K})}\right) \mathscr{H}(G''; D_1^{\#}, \ldots, D_n^{\#}) \leq c \deg(G) \cdot \mathscr{H}(G; D_1^{\#}, \ldots, D_n^{\#}). \tag{64}$$

Si $C_0 > c\deg(G)^2$, on montre que $t_{G''}+V \neq t_G$ en utilisant les mêmes arguments qu'à l'étape 1. On en déduit que si la constante c_{52} est suffisamment grande, l'inégalité (64) contredit le lemme 7.4.2, ce qui achève la démonstration.

□

7.4.4. Choix des paramètres. Nous allons maintenant fixer tous les paramètres introduits précédemment. Rappelons que l'on a noté $D = [K:\mathbb{Q}]/[K_{v_0}:\mathbb{Q}_{v_0}]$. Dans toute la suite, C_0 désigne un nombre réel supérieur à $\max\{c_{49}, c_{51}\} \geq 1$. Si $v_0|p_0$ est ultramétrique, on suppose également que $C_0 > (\log p_0)^2$.

7.4.4.1. *Cas archimédien.* Supposons que la place v_0 est archimédienne. Soit $\mathfrak{e} \geq e$ un nombre réel et soit $\mathfrak{a} \geq 1$ un nombre réel tel que

$$\mathfrak{a} \geq \frac{\max\{D, Dh(V), \log(\deg H), \log_+ \|u\|_{v_0}\}}{\log \mathfrak{e}}.$$

Posons alors $S_0 := [C_0\mathfrak{a}]$ et $S := [C_0^3\mathfrak{a}]$. On définit également les quantités

$$A_i := D \max_{k\leq(g+1)S} h(k\mathbf{p}_i) + (1 + C_0^3\mathfrak{a}\mathfrak{e}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}, \quad i \in \{1,\dots,n\},$$

et

$$U := C_0 S_0 \log \mathfrak{e}\,(S+1)^{1/t} \prod_{i=1}^{n} \left(C_0^2 + \frac{C_0 A_i}{S_0 \log \mathfrak{e}}\right)^{g_i/t}.$$

On pose alors

$$\widetilde{T} := \frac{U}{S_0 \log \mathfrak{e}},$$

et

$$\widetilde{D}_i := \frac{U}{C_0 A_i + C_0^2 S_0 \log \mathfrak{e}}, \quad i \in \{1,\dots,n\}.$$

Rappelons que l'on a noté $T = [\widetilde{T}]$, $D_i = [x\widetilde{D}_i]$ et $D_i' = \max\{1, D_i\}$ pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$. On définit également

$$\alpha := \exp(U(g + \sqrt{C_0})).$$

Nous aurons besoin du lemme suivant.

LEMME 7.4.5. *Les inégalités suivantes sont vérifiées :*

(1) $x \leq 1$;

(2) $\widetilde{T} > C_0^2$, $T > C_0$;

(3) $(S_0+1)/(S+1) \leq 2/C_0^2$, $S/S_0 \leq 2C_0^2$;

(4) $T > C_0 \max\{D_1',\dots,D_n'\}$;

(5) $D_i \leq D_i' \leq \widetilde{D}_i \leq \widetilde{D}_i A_i \leq U/C_0 \quad \forall\, i \in \{1,\dots,n\}$;

(6) $\widetilde{D}_i \max_{k\leq(g+1)S} h(k\mathbf{p}_i) \leq \frac{U}{DC_0} \quad \forall\, i \in \{1,\dots,n\}$;

(7) $\widetilde{D}_i(1 + S\mathfrak{e}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i} \leq \frac{U}{C_0} \quad \forall\, i \in \{1,\dots,n\}$.

Démonstration : Montrons le premier point. Par définition de x, on a l'implication

$$\frac{1}{\deg(G)} \frac{\widetilde{T}^{g-t}(S+1)}{C_0\widetilde{D}_1^{g_1}\cdots\widetilde{D}_n^{g_n}} = A(\{0\})^t \leq 1 \implies x \leq 1.$$

La définition de U correspond précisément à l'égalité $\deg(G)A(\{0\})^t = C_0^{-(t+1)} \leq 1$, ce qui démontre le point 1. Les points suivants sont des conséquences immédiates des définitions et de l'inégalité $x \leq 1$.

□

7.4.4.2. *Cas ultramétrique.* Supposons que la place v_0 est ultramétrique. Considérons un nombre réel $\mathfrak{R} \in]1; r_{p_0}/\|u\|_{v_0}[$ et soit $\mathfrak{a} \geq 1$ tel que

$$\mathfrak{a} \log \mathfrak{R} \geq D \max\{1, h(V)\} + \log_+((\log \mathfrak{R})^{-1}).$$

Posons $S_0 := [C_0\mathfrak{a}]$ et $S := [C_0^3\mathfrak{a}]$. On définit également les quantités

$$A_i := D \max_{k \leq (g+1)S} h(k\mathbf{p}_i), \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

et

$$U := C_0 S_0 \log \mathfrak{R}\, (S+1)^{1/t} \prod_{i=1}^{n} \left(C_0^2 + \frac{C_0 A_i}{S_0 \log \mathfrak{R}} \right)^{g_i/t}.$$

On pose alors

$$\widetilde{T} := \frac{U}{S_0 \log \mathfrak{R}},$$

et

$$\widetilde{D}_i := \frac{U}{C_0 A_i + C_0^2 S_0 \log \mathfrak{R}}, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Rappelons que l'on a noté $T = [\widetilde{T}]$, $D_i = [x\widetilde{D}_i]$ et $D_i' = \max\{1, D_i\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. On considère également un nombre réel strictement positif $\alpha \in |K_{v_0}|_{v_0}$ vérifiant

$$\exp(U(g + \sqrt{C_0})) \leq \alpha \leq \exp(U(g + 2\sqrt{C_0}))$$

(voir page 127). Comme dans le cas archimédien, énumérons quelques propriétés utiles satisfaites par ces paramètres.

Lemme 7.4.6. *Les inégalités suivantes sont vérifiées :*

(1) $x \leq 1$ *;*

(2) $\widetilde{T} > C_0^2$, $T > C_0$ *;*

(3) $(S_0 + 1)/(S + 1) \leq 2/C_0^2$, $S/S_0 \leq 2C_0^2$ *;*

(4) $T > C_0 \max\{D_1', \dots, D_n'\}$ *;*

(5) $D_i \leq D_i' \leq \widetilde{D}_i \leq \widetilde{D}_i A_i \leq U/C_0 \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$ *;*

(6) $\widetilde{D}_i \max_{k \leq (g+1)S} h(k\mathbf{p}_i) \leq \frac{U}{DC_0} \quad \forall\, i \in \{1, \dots, n\}$ *;*

(7) $S_0 \log \mathfrak{R} \geq \log S_0$.

7.4.4.3. *Hypothèse centrale.* Nous allons raisonner par l'absurde afin de démontrer une minoration de la distance $d(u, V)$. Dans toute la suite, on fait l'hypothèse suivante, qui implique en particulier que les conclusions des lemmes 7.4.3 et 7.4.4 sont satisfaites.

Hypothèse 3. La distance $d(u, V)$ est inférieure à $\exp(-2\sqrt{C_0}U)$.

Remarque importante : Dans la suite du texte, nous allons établir des estimations analytiques dont les démonstrations sont les mêmes que celles du cas semi-abélien, appliquées avec $D_0 = 0$. Nous renverrons systématiquement aux démonstrations correspondantes du paragraphe 7.3. Bien que notre définition de U soit légèrement différente, les seules propriétés des paramètres dont nous avons besoin dans les preuves sont celles des lemmes 7.4.5 et 7.4.6, qui sont exactement les mêmes que celles des lemmes 7.3.5 et 7.3.6.

7.4.5. Étude de la matrice $\mathcal{A}_0$.

7.4.5.1. *Majoration du rang.* Le rang $\operatorname{rg}\mathcal{A}_0$ de la matrice $\mathcal{A}_0$ est égal au rang du système

$$\forall (m,\boldsymbol{\tau}) \in \boldsymbol{\Upsilon}, \quad D^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{w}} F_s(mu) = 0$$

en les inconnues p_i définies par $s = \sum_{i=1}^{\dim E} p_i s_i$. On note $\widetilde{\lambda} = \operatorname{codim}_V V \cap t_{\widetilde{G}}$. Les arguments de la démonstration du lemme 6.7 de [**67**] montrent que ce rang est inférieur à celui du système

$$\forall (m,\boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{\widetilde{\lambda}}; 0 \leq m \leq S_0,\ |\boldsymbol{\tau}| \leq 2gT, \quad D^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{w}'} P(m\mathbf{p} + \widetilde{G}) = 0$$

où $\mathbf{w}'$ désigne une base d'un supplémentaire de $V \cap t_{\widetilde{G}}$ dans V si $\widetilde{\lambda} \geq 1$ (voir aussi la démonstration du lemme 6.1 de [**17**]), et où les inconnues du système sont les coordonnées des polynômes $P \in K[\mathbb{P}]_{\mathbf{D}}$ (dans une base quelconque de $K[\mathbb{P}]_{\mathbf{D}}$). On en déduit que

$$\operatorname{rg}(\mathcal{A}_0) \leq \operatorname{card}\{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{\widetilde{\lambda}},\ |\boldsymbol{\tau}| \leq 2gT\} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{q}}(S_0) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right) \dim(\mathbb{C}_{v_0}[\mathbb{P}]/I_{\widetilde{G}})_{2\mathbf{D}},$$

où $I_{\widetilde{G}}$ désigne l'idéal des polynômes identiquement nuls sur $\widetilde{G}$. Comme au paragraphe 7.3.5.1, nous appliquons un théorème de Chardin [**12**] pour obtenir l'inégalité

$$\dim(\mathbb{C}_{v_0}[\mathbb{P}]/I_{\widetilde{G}})_{2\mathbf{D}} \leq c'_{53} \mathscr{H}(\widetilde{G}; D'_1, \ldots, D'_n),$$

où $c'_{53} \geq 1$ est une constante ne dépendant que de g. Rappelons que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, l'application partielle

$$x_i \mapsto \mathscr{H}(\widetilde{G}; x_1, \ldots, x_n)/\mathscr{H}(G; x_1, \ldots, x_n)$$

est décroissante (voir par exemple [**46**, propriété 4.4]). En remarquant que $D_i^{\#} \leq 2D'_i$ et en appliquant le lemme 7.4.2, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}\mathcal{A}_0 &\leq (2g)^g c'_{53} \widetilde{T}^{\widetilde{\lambda}} \operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S_0) + \widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right) \mathscr{H}(\widetilde{G}; D'_1, \ldots, D'_n) \\ &\leq (2g)^g 2^{g+1} C_0 c'_{53} \frac{\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S_0)+\widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right)}{\operatorname{card}\left(\frac{\Sigma_{\mathbf{p}}(S)+\widetilde{G}(\overline{K})}{\widetilde{G}(\overline{K})}\right)} \mathscr{H}(G; D'_1, \ldots, D'_n). \end{aligned} \tag{65}$$

De la même façon que dans le cas semi-abélien, le lemme 7.4.3 et l'inégalité (65) conduisent à la proposition suivante.

Proposition 7.4.7. *Il existe une constante $c_{53} = c_{54} \deg G$, où $c_{54} \geq 1$ ne dépend que de g, telle que l'on ait*

$$\frac{\operatorname{rg}(\mathcal{A}_0)}{\dim E} \leq c_{53} C_0 \frac{S_0 + 1}{S + 1} \leq \frac{2c_{53}}{C_0}.$$

7.4.5.2. *Majoration de la norme d'opérateur de $\mathcal{A}_0$.* Nous allons maintenant majorer la quantité $\|\mathcal{A}_0\|_{v_0}$, définie par

$$\|\mathcal{A}_0\|_{v_0} = \sup\left\{\frac{|\mathcal{A}_0 s|_{2,v_0}}{\|s\|_{E,v_0}} \mid s \in E \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}\right\}.$$

La majoration repose sur les mêmes arguments que dans le cas semi-abélien. Soit $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_{g-t})$ une base de $V \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ telle que $\|v_i\|_{v_0} \leq 1$ pour tout $i \in \{1, \ldots, g-t\}$. Le résultat suivant correspond au lemme 7.3.12 dans le cas où $D_0 = 0$.

Lemme 7.4.8. *Soit $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_{g-t}) \in \mathbb{N}^{g-t}$ et soit $s \in E \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$. Si v_0 est archimédienne, alors pour tout $z \in \mathbb{C}_{v_0}^{g_1} \times \cdots \times \mathbb{C}_{v_0}^{g_n} \simeq t_G(\mathbb{C}_{v_0})$, on a*

$$\left|\frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}^{\boldsymbol{\tau}}_{\mathbf{v}} F_s(z)\right|_{v_0} \leq (g^2 - 1)^{|\boldsymbol{\tau}|} \prod_{i=1}^{n} \exp(c_{55} D_i (1 + \|z_i\|_{v_0})^{\rho_i}) \|s\|_{E,v_0},$$

où z_i désigne la projection de z sur $\mathbb{C}_{v_0}^{g_i}$ et $c_{55} \geq 1$ est une constante ne dépendant que de $\phi, \|.\|_{v_0}, g$. Si v_0 est une place finie, alors pour tout $z \in D(0, r_{p_0})$,

$$\left| \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{v}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(z) \right|_{v_0} \leq \|s\|_{E,v_0}.$$

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition de la norme d'opérateur et du lemme 7.4.8 (ainsi que d'une majoration grossière de card $\boldsymbol{\Upsilon}$ dans le cas archimédien).

PROPOSITION 7.4.9. *Si v_0 est une place archimédienne, il existe une constante $c_{56} \geq 1$ (ne dépendant que de ϕ, $\|.\|_{v_0}$, g) telle que la norme d'opérateur de $\mathcal{A}_0$ vérifie*

$$\|\mathcal{A}_0\|_{v_0} \leq \exp\left(\frac{c_{56} U}{C_0} \right).$$

Si la place v_0 est ultramétrique, alors on a

$$\|\mathcal{A}_0\|_{v_0} \leq 1.$$

7.4.6. Construction d'une section auxiliaire. Les majorations du paragraphe 7.4.5 nous permettent d'appliquer le lemme de Siegel du paragraphe 1.1 pour obtenir la proposition suivante.

PROPOSITION 7.4.10. *Il existe une constante c_{57} et une section $s \in E \otimes_K \overline{K} \setminus \{0\}$ telle que :*

$$h_\alpha(s) \leq \frac{c_{57}}{D\sqrt{C_0}} U.$$

De plus, la constante c_{57} est de la forme $c_{58}(\deg G)^g$, où c_{58} ne dépend que de ϕ, $\|.\|_{v_0}$, g.

Démonstration : La preuve est en tout point similaire à celle de la proposition 7.3.14 : il suffit d'appliquer le lemme 1.1.22 du paragraphe 1.1 et les propositions 7.4.7 et 7.4.9.

□

7.4.7. Construction d'un jet et premières estimations. Considérons un élément non nul $s \in E \otimes_K \overline{K}$ dont la hauteur $h_\alpha(s)$ vérifie la majoration de la proposition 7.4.10. Soit $(m, \ell) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le couple minimal (pour l'ordre lexicographique) pour lequel il existe un élément $\boldsymbol{\tau}$ de $\mathbb{N}^{g-t}$ tel que $|\tau| = \ell$ et $\mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(mu) \neq 0$. D'après le lemme de multiplicités 7.3.4, on a $m \leq gS$ et $\ell \leq gT$. Soit K' une extension finie de K telle que $s \in E \otimes_K K'$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on choisit un entier $\varepsilon_i \in \{0, \ldots, N_i\}$ vérifiant

$$|\varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)|_{v_0} = \max_{0 \leq j \leq N_i} |\varphi_{i,j}(mu_i)|_{v_0}.$$

En particulier $\varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i) \neq 0$. Soit $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_{g-t})$ une K-base de V. On note $\mathbf{b}^\vee$ la base duale de $\mathbf{b}$. On considère alors l'élément $\mathcal{J}$ de $S^\ell(V^\vee) \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ défini par

$$\mathcal{J} = \sum_{\substack{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g-t} \\ |\boldsymbol{\tau}| = \ell}} \prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{b}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(mu) (\mathbf{b}^\vee)^{\boldsymbol{\tau}}.$$

Les résultats du paragraphe 7.3.7 (appliqués avec $D_0 = 0$) montrent que $\mathcal{J}$ ne dépend pas du choix de la base $\mathbf{b}$ et que $\mathcal{J}$ appartient à $S^\ell(V^\vee) \otimes_K K'$. On munit l'espace vectoriel $S^\ell(V^\vee) \otimes_K K'$ de la structure de fibré adélique hermitien induite par celle de V. Nous disposons également de la majoration suivante.

PROPOSITION 7.4.11. *On a l'inégalité*

$$\sum_{\substack{v \in \Sigma_{K'} \\ v \nmid v_0}} \frac{[K'_v : \mathbb{Q}_v]}{[K' : \mathbb{Q}]} \log \|\mathcal{J}\|_v \leq \sum_{\substack{v \in \Sigma_{K'} \\ v \nmid v_0}} \frac{[K'_v : \mathbb{Q}_v]}{[K' : \mathbb{Q}]} \log \|s\|_{\alpha,v} + c_{59} \frac{U}{DC_0},$$

où $c_{59} = c_{37} \geq 1$ est la constante de la proposition 7.3.19 (qui ne dépend que de G, ϕ).

Démonstration : La démonstration est identique à celle de la proposition 7.3.19 (il suffit de poser $D_0 = 0$).

□

Afin d'obtenir une majoration de la hauteur de $\mathcal{J}$, nous devons maintenant majorer $\|\mathcal{J}\|_v$ pour toute place v de K' au dessus de v_0. Afin d'aboutir à une contradiction, cette étape nécessite une étude minutieuse et fait l'objet de la partie suivante.

7.4.8. Majorations en les places $v|v_0$. Soit $v \in \Sigma_{K'}$ une place divisant v_0. Comme dans le cas semi-abélien, la majoration de $\|\mathcal{J}\|_v$ repose sur une extrapolation sur les points. On peut supposer sans perte de généralité que la base $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{g-t})$ de $V \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$ (définie à la page 154) est orthonormée si v_0 est archimédienne, et qu'elle vérifie : pour tout $x = \sum_{j=1}^{g-t} x_j w_j \in V \otimes_K \mathbb{C}_{v_0}$, $\|x\|_{v_0} > r_{p_0} \max_j |x_j|_{v_0}$ si v_0 est ultramétrique (voir page 146). En reprenant exactement les mêmes arguments qu'au paragraphe 7.3.8 (appliqués avec $D_0 = 0$), nous obtenons la proposition suivante.

PROPOSITION 7.4.12. *Il existe une constante $c_{60} \geq 1$ (ne dépendant que de g, ϕ et $\|.\|_{v_0}$) telle que si $C_0 \geq c_{60}$, alors pour tout $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{N}^{g-t}$ tel que $|\boldsymbol{\tau}| = \ell$ et pour toute place $v \in \Sigma_{K'}$ telle que $v|v_0$, on a*

$$\left| \prod_{i=1}^{n} \varphi_{i,\varepsilon_i}(mu_i)^{-D_i} \frac{1}{\boldsymbol{\tau}!} \mathcal{D}_{\mathbf{w}}^{\boldsymbol{\tau}} F_s(mu) \right|_v \leq e^{-U} \|s\|_{\alpha,v}.$$

7.4.9. Conclusion. Nous allons obtenir une contradiction au moyen de la proposition suivante.

PROPOSITION 7.4.13. *Supposons que le réel C_0 est supérieur à $\max\{c_{59}^2, c_{60}\}$. Alors il existe une constante c_{61} telle que l'on ait l'encadrement*

$$-c_{61} \frac{U}{C_0 D} \leq h(\mathcal{J}) \leq \frac{2c_{57} U}{D\sqrt{C_0}} - \frac{U}{2D}.$$

De plus, c_{61} est de la forme $c_{62} \times \max\{1, \widehat{\mu}_{\max}(t_G)\}$, où $c_{62} \geq 1$ ne dépend que de g.

Démonstration : En reprenant les arguments du lemme 7.3.27 (en remplaçant W par V et $t_{G_0 \times G}$ par t_G), on obtient

$$h(\mathcal{J}) \geq -c_{61} \max\{1, h(V)\} \geq -c_{61} \frac{U}{C_0 D}.$$

D'après la proposition 7.4.12 et la définition de $\|\mathcal{J}\|_v$, on a

$$\sum_{v \in \Sigma_{K'}, v|v_0} \frac{[K'_v : \mathbb{Q}_v]}{[K' : \mathbb{Q}]} \log \|\mathcal{J}\|_v \leq \sum_{v \in \Sigma_{K'}, v|v_0} \frac{[K'_v : \mathbb{Q}_v]}{[K' : \mathbb{Q}]} \log \|s\|_{\alpha,v} - \frac{U}{2D}.$$

En appliquant la proposition 7.4.11, on obtient

$$h(\mathcal{J}) \leq h_\alpha(s) - \frac{U}{2D} + c_{59} \frac{U}{DC_0}$$

Par ailleurs, rappelons que la section $s \in E \otimes_K K'$ a été choisie de sorte que la majoration de la proposition 7.4.10 soit satisfaite :

$$h_\alpha(s) \leq \frac{c_{57}}{D\sqrt{C_0}} U.$$

On en déduit la majoration voulue.

□

La proposition 7.4.13 implique que

$$U \leq \frac{2c_{61} + 4c_{57}}{\sqrt{C_0}} U.$$

On a donc une contradiction si $C_0 > \max\{c_{49}, c_{51}, c_{59}^2, c_{60}, (2c_{61} + 4c_{57})^2\}$, et l'on a alors

$$\log d(u, V) > -2\sqrt{C_0} U. \tag{66}$$

Pour conclure, il suffit de majorer le terme U par les quantités U_0 et U_1 des théorèmes 7.2.1 et 7.2.2 (à constantes près). Ces comparaisons sont analogues à celles du paragraphe 7.3.11 et ne font pas intervenir d'argument nouveau.

REMARQUE 7.4.14. Supposons que la place v_0 est archimédienne. La quantité

$$\max\{c_{49}, c_{51}, c_{59}^2, c_{60}, (2c_{61} + 4c_{57})^2\}$$

de la démonstration est majorée par $c_{63}c_{59}^2(\deg G)^{2g} \max\{1, \widehat{\mu}_{\max}(t_G)\}$, où $c_{63} \geq 1$ est une constante ne dépendant que de g, ϕ, $\|.\|_{v_0}$. Pour tout réel $\mathfrak{a} \geq 1$ supérieur à

$$\frac{\max\{D, Dh(V), \log(\deg H), \log_+ \|u\|_{v_0}\}}{\log \mathfrak{e}},$$

l'inégalité (66) et le lemme 7.3.33 entraînent la minoration

$$\log d(u, V) \geq -c_{64}C_2^{5/2+(6g+3)/t}(\mathfrak{a} \log \mathfrak{e})\mathfrak{a}^{1/t}$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} \left(1 + \frac{\max_{k \leq C_2^3 \mathfrak{a}} h(k\mathbf{p}_i) + (\mathfrak{e}\mathfrak{a}\|u_i\|_{v_0})^{\rho_i}}{\mathfrak{a} \log \mathfrak{e}}\right)^{g_i/t},$$

où $c_{64} \geq 1$ est une constante ne dépendant que de g, ϕ, $\|.\|_{v_0}$, et

$$C_2 := c_{59}^2(\deg G)^2 \max\{1, \widehat{\mu}_{\max}(t_G)\}.$$

Bibliographie

[1] Y. Amice : Interpolation p-adique. *In Les Tendances Géom. en Algèbre et Théorie des Nombres*, p. 15–25. Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1966.

[2] A. Baker : Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. I, II, III. *Mathematika 13 (1966), 204-216 ; ibid. 14 (1967), 102-107 ; ibid.*, 14:220–228, 1967.

[3] A. Baker : Linear forms in the logarithms of algebraic numbers. IV. *Mathematika*, 15:204–216, 1968.

[4] D. Bertrand et P. Philippon : Sous-groupes algébriques de groupes algébriques commutatifs. *Illinois J. Math.*, 32(2):263–280, 1988.

[5] E. Bombieri et J. Vaaler : On Siegel's lemma. *Invent. Math.*, 73(1):11–32, 1983.

[6] S. Bosch, W. Lütkebohmert et M. Raynaud : *Néron models*, vol. 21 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[7] V. Bosser et E. Gaudron : Logarithmes des points rationnels des variétés abéliennes. 2017. Disponible à l'adresse `http://math.univ-bpclermont.fr/~gaudron/`.

[8] J.-B. Bost : Algebraic leaves of algebraic foliations over number fields. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (93):161–221, 2001.

[9] J.-B. Bost et H. Chen : Concerning the semistability of tensor products in Arakelov geometry. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 99(4):436–488, 2013.

[10] J.-B. Bost, H. Gillet et C. Soulé : Heights of projective varieties and positive Green forms. *J. Amer. Math. Soc.*, 7(4):903–1027, 1994.

[11] M. Brion : Some structure theorems for algebraic groups. *Proc. Symp. Pure Math.*, 94:53–125, 2017.

[12] M. Chardin : Une majoration de la fonction de Hilbert et ses conséquences pour l'interpolation algébrique. *Bull. Soc. Math. France*, 117(3):305–318, 1989.

[13] H. Chen : Convergence des polygones de Harder-Narasimhan. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (120):116, 2010.

[14] H. Chen et C. Maclean : Distribution of logarithmic spectra of the equilibrium energy. *Manuscripta Math.*, 146(3-4):365–394, 2015.

[15] P. R. Chernoff, R. A. Rasala et W. C. Waterhouse : The Stone-Weierstrass theorem for valuable fields. *Pacific J. Math.*, 27:233–240, 1968.

[16] K.-K. Choi et J. D. Vaaler : Diophantine approximation in projective space. *In Number theory (Ottawa, ON, 1996)*, vol. 19 de *CRM Proc. Lecture Notes*, p. 55–65. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[17] S. David : Minorations de formes linéaires de logarithmes elliptiques. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (62):iv+143, 1995.

[18] J.-P. Demailly : Singular Hermitian metrics on positive line bundles. *In Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990)*, vol. 1507 de *Lecture Notes in Math.*, p. 87–104. Springer, Berlin, 1992.

[19] M. Demazure : Fibrés tangents, algèbres de Lie. *In Schémas en Groupes (Sém. Géométrie Algébrique, Inst. Hautes Études Sci., 1963), Fasc. 1, Exposé 2*, p. 40. Inst. Hautes Études Sci., Paris, 1963.

[20] J. Dieudonné et A. Grothendieck : Éléments de Géométrie Algébrique, chapitre II. Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.

[21] J. H. Evertse : The Harder-Narasimhan filtration of a multi-weighted vector space. Prépublication, 2017. 33 pages. Disponible à l'adresse `http://www.math.leidenuniv.nl/~evertse/publications.shtml`.

[22] J.-H. Evertse : An explicit version of Faltings' product theorem and an improvement of Roth's lemma. *Acta Arith.*, 73(3):215–248, 1995.

[23] J.-H. Evertse et R. G. Ferretti : Diophantine inequalities on projective varieties. *Int. Math. Res. Not.*, (25):1295–1330, 2002.

[24] G. Faltings : Diophantine approximation on abelian varieties. *Ann. of Math. (2)*, 133(3):549–576, 1991.

[25] G. Faltings : Mumford-Stabilität in der algebraischen Geometrie. *In Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, p. 648–655. Birkhäuser, Basel, 1995.

[26] G. Faltings et G. Wüstholz : Diophantine approximations on projective spaces. *Invent. Math.*, 116(1-3):109–138, 1994.

[27] N. I. Fel'dman : An improvement of the estimate of a linear form in the logarithms of algebraic numbers. *Mat. Sb. (N.S.)*, 77 (119):423–436, 1968.

[28] R. Ferretti : An effective version of Faltings' product theorem. *Forum Math.*, 8(4):401–427, 1996.

[29] R. G. Ferretti : Quantitative diophantine approximations on projective varieties. Prépublication I.H.E.S, 1996. 37 pages.

[30] R. G. Ferretti : Quantitative diophantine approximations on projective varieties. Prépublication, seconde version, 1999. 49 pages.

[31] C. Gasbarri : Transcendental Liouville inequalities on projective varieties. arXiv :1609.04262.

[32] É. Gaudron : *Mesure d'indépendance de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif.* Thèse de doctorat, Université Jean Monnet, Saint Étienne, décembre 2001.

[33] É. Gaudron : Mesures d'indépendance linéaire de logarithmes dans un groupe algébrique commutatif. *Invent. Math.*, 162(1):137–188, 2005.

[34] É. Gaudron : Formes linéaires de logarithmes effectives sur les variétés abéliennes. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 39(5):699–773, 2006.

[35] É. Gaudron : Étude du cas rationnel de la théorie des formes linéaires de logarithmes. *J. Number Theory*, 127(2):220–261, 2007.

[36] É. Gaudron : Pentes des fibrés vectoriels adéliques sur un corps global. *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 119:21–95, 2008.

[37] É. Gaudron : Géométrie des nombres adélique et lemmes de Siegel généralisés. *Manuscripta Math.*, 130(2):159–182, 2009.

[38] É. Gaudron : Minorations simultanées de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques. *Bull. Soc. Math. France*, 142(1):1–62, 2014.

[39] É. Gaudron et G. Rémond : Lemmes de Siegel d'évitement. *Acta Arith.*, 154(2):125–136, 2012.

[40] É. Gaudron et G. Rémond : Minima, pentes et algèbre tensorielle. *Israel J. Math.*, 195(2):565–591, 2013.

[41] H. Gillet et C. Soulé : Arithmetic intersection theory. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (72):93–174 (1991), 1990.

[42] H. Gillet et C. Soulé : Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric. I. *Ann. of Math. (2)*, 131(1):163–203, 1990.

[43] H. Gillet et C. Soulé : Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric. II. *Ann. of Math. (2)*, 131(2):205–238, 1990.

[44] R. Hartshorne : *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[45] M. Hindry et J. H. Silverman : *Diophantine geometry*, vol. 201 de *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 2000. An introduction.

[46] N. Hirata-Kohno : Formes linéaires de logarithmes de points algébriques sur les groupes algébriques. *Invent. Math.*, 104(2):401–433, 1991.

[47] N. Hirata-Kohno : Approximations simultanées sur les groupes algébriques commutatifs. *Compositio Math.*, 86(1):69–96, 1993.

[48] J. Kollár : *Lectures on resolution of singularities*, vol. 166 de *Annals of Mathematics Studies.* Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.

[49] L. Lafforgue : Le lemme de l'indice pour les polynômes, prépublication de l'Ecole Normale Supérieure. 1990.

[50] H. Lange : A remark on the degrees of commutative algebraic groups. *Illinois J. Math.*, 33(3):409–415, 1989.

[51] C. Laurent-Thiébaut : *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables.* Savoirs Actuels. [Current Scholarship]. InterEditions, Paris ; Masson, Paris, 1997. Mathématiques. [Mathematics].

[52] R. Lazarsfeld : *Positivity in algebraic geometry. I*, vol. 48 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics].* Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting : line bundles and linear series.

[53] F. v. Lindemann : Über die Ludolph'sche Zahl. *Sitzungber. Königl. Preuss. Akad. Wissensch. zu Berlin*, 2:679–682, 1882.

[54] Q. Liu : *Algebraic geometry and arithmetic curves*, vol. 6 de *Oxford Graduate Texts in Mathematics.* Oxford University Press, Oxford, 2002. Translated from the French by Reinie Erné, Oxford Science Publications.

[55] E. M. Matveev : Arithmetic properties of the values of generalized binomials. *Mat. Zametki*, 54(4):76–81, 159, 1993.

[56] D. McKinnon et M. Roth : Seshadri constants, diophantine approximation, and Roth's theorem for arbitrary varieties. *Invent. Math.*, 200(2):513–583, 2015.

[57] D. McKinnon et M. Roth : An analogue of Liouville's Theorem and an application to cubic surfaces. *Eur. J. Math.*, 2(4):929–959, 2016.

[58] J. S. Milne : *Étale cohomology*, vol. 33 de *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[59] A. Moriwaki : *Arakelov geometry*, vol. 244 de *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI. Translated from the 2008 Japanese original.

[60] A. Moriwaki : Free basis consisting of strictly small sections. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (6):1245–1267, 2011.

[61] A. Moriwaki : Semiample invertible sheaves with semipositive continuous hermitian metrics. *Algebra Number Theory*, 9(2):503–509, 2015.

[62] M. Nakamaye : Multiplicity estimates on commutative algebraic groups. *J. Reine Angew. Math.*, 607:217–235, 2007.

[63] Y. V. Nesterenko : Estimates for the characteristic function of a prime ideal. *Mat. Sb. (N.S.)*, 123(165)(1):11–34, 1984.

[64] P. Philippon : Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Bull. Soc. Math. France*, 114(3):355–383, 1986.

[65] P. Philippon : Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Rocky Mountain J. Math.*, 26(3):1069–1088, 1996. Symposium on Diophantine Problems (Boulder, CO, 1994).

[66] P. Philippon et M. Waldschmidt : Formes linéaires de logarithmes simultanées sur les groupes algébriques commutatifs. *In Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1986–87*, vol. 75 de *Progr. Math.*, p. 313–347. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1988.

[67] P. Philippon et M. Waldschmidt : Formes linéaires de logarithmes sur les groupes algébriques commutatifs. *Illinois J. Math.*, 32(2):281–314, 1988.

[68] G. Rémond : Sur le théorème du produit. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 13(1):287–302, 2001. 21st Journées Arithmétiques (Rome, 2001).

[69] P. Robba : Lemmes de Schwarz et lemmes d'approximations p-adiques en plusieurs variables. *Invent. Math.*, 48(3):245–277, 1978.

[70] A. M. Robert : *A course in p-adic analysis*, vol. 198 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[71] M. Rosenlicht : Some basic theorems on algebraic groups. *Amer. J. Math.*, 78:401–443, 1956.

[72] D. Roy et J. L. Thunder : An absolute Siegel's lemma. *J. Reine Angew. Math.*, 476:1–26, 1996.

[73] D. Roy et J. L. Thunder : Addendum and erratum to : "An absolute Siegel's lemma" [J. Reine Angew. Math. **476** (1996), 1–26 ; MR1401695 (97h :11075)]. *J. Reine Angew. Math.*, 508:47–51, 1999.

[74] J.-P. Serre : *Lie algebras and Lie groups*, vol. 1964 de *Lectures given at Harvard University*. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1965.

[75] M. Sombra : Bounds for the Hilbert function of polynomial ideals and for the degrees in the Nullstellensatz. *J. Pure Appl. Algebra*, 117/118:565–599, 1997. Algorithms for algebra (Eindhoven, 1996).

[76] M. van der Put : The product theorem. *In Diophantine approximation and abelian varieties (Soesterberg, 1992)*, vol. 1566 de *Lecture Notes in Math.*, p. 77–82. Springer, Berlin, 1993.

[77] P. Vojta : Applications of arithmetic algebraic geometry to Diophantine approximations. *In Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, vol. 1553 de *Lecture Notes in Math.*, p. 164–208. Springer, Berlin, 1993.

[78] M. Waldschmidt : *Nombres transcendants et groupes algébriques*, vol. 69 de *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1979. With appendices by Daniel Bertrand and Jean-Pierre Serre, With an English summary.

[79] M. Waldschmidt : Approximation diophantienne dans les groupes algébriques commutatifs. I. Une version effective du théorème du sous-groupe algébrique. *J. Reine Angew. Math.*, 493:61–113, 1997.

[80] M. Waldschmidt : *Diophantine approximation on linear algebraic groups*, vol. 326 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 2000. Transcendence properties of the exponential function in several variables.

[81] K. Weierstrass : Zu Hrn. Lindemann's Abhandlung : « Über die Ludolph'sche Zahl ». *Sitzungber. Königl. Preuss. Akad. Wissensch. zu Berlin*, 2:1067–1086, 1885.

[82] G. Wüstholz : Recent progress in transcendence theory. *In Number theory, Noordwijkerhout 1983 (Noordwijkerhout, 1983)*, vol. 1068 de *Lecture Notes in Math.*, p. 280–296. Springer, Berlin, 1984.

[83] G. Wüstholz : Multiplicity estimates on group varieties. *Ann. of Math. (2)*, 129(3):471–500, 1989.

[84] U. Zannier : *Lecture notes on Diophantine analysis*, vol. 8 de *Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa (Nuova Serie) [Lecture Notes. Scuola Normale Superiore di Pisa (New Series)]*. Edizioni della Normale, Pisa, 2009. With an appendix by Francesco Amoroso.

[85] S. Zhang : Positive line bundles on arithmetic varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 8(1):187–221, 1995.

[86] S. Zhang : Small points and adelic metrics. *J. Algebraic Geom.*, 4(2):281–300, 1995.